



**Интеллектуальный конкурс на кубок Главы города Челябинска
«Олимпиада по математике, информатике, криптографии
имени А.М. Ильина»**

5 класс

1. Пусть счастливые числа – это те числа, которые содержат только счастливые цифры 7 и 4. Найти количество счастливых чисел, не больших 4444. (10 баллов)
Решение: Число комбинаций K -значных чисел с 2 вариантами цифр $= 2^K$, $2^1+2^2+2^3=14$, да ещё одно 4-значное число.
Ответ: 15.
2. Катя придумала пароль, простое трёхзначное число, все цифры которого различны. На какую цифру может оканчиваться пароль, если его последняя цифра равна сумме первых двух? (10 баллов)
Решение: Очевидно, что последняя цифра больше 1. Трёхзначное простое число не может оканчиваться ни на чётную цифру (т. е. на 0, 2, 4, 6 или 8), ни на цифру 5. Если последняя цифра 3 или 9, то сумма всех цифр числа, равная удвоенной последней цифре, делится на 3, а тогда само число делится на 3. Таким образом, осталась только цифра семь.
Ответ: 7.
3. Шифр кодового замка является двузначным числом. Незнайка забыл код, но помнит, что сумма цифр этого числа, сложенная с их произведением, равна самому числу. Напишите все возможные варианты кода, чтобы Незнайка смог быстрее открыть замок. (10 баллов)
Решение: Пусть первая цифра кода x , а вторая y . Тогда само число записывается как $10x + y$, а условие задачи можно записать уравнением $(x + y) + x \cdot y = 10x + y$. Следовательно, $x \cdot y = 9x$.
Так как код — двузначное число, то x не равно 0, а значит, $y = 9$. При этом x можно взять любым кроме 0.
Ответ: 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99.
4. На каждой из клеток доски размером 9×9 находится фишка. Петя хочет передвинуть каждую фишку на соседнюю по диагонали клетку так, чтобы снова в каждой из клеток оказалось по одной фишке. Сможет ли Петя это сделать? (10 баллов)
Решение: При шахматной раскраске имеются 41 черная и 40 белых клеток. При передвижении на соседнюю по вертикали или диагонали клетку, фишка всегда меняет цвет клетки на противоположный (с черной клетки перейдет на белую, а с белой — на черную). Так как 41 – число нечетное, то черных и белых будет непоровну. Поэтому после передвижения фишек останутся незанятые черные клетки.
Ответ: Нет, не сможет.



**Интеллектуальный конкурс на кубок Главы города Челябинска
«Олимпиада по математике, информатике, криптографии
имени А.М. Ильина»**

6 класс

1. Пусть счастливые числа – это те числа, которые содержат только счастливые цифры 6 и 3. Найти количество счастливых чисел, не больших 3333. (10 баллов)

Решение: Число комбинаций k -значных чисел с 2 вариантами цифр $= 2^k$, $2^1+2^2+2^3=14$, да ещё одно 4-значное число.

Ответ: 15.

2. Вадик написал название своего родного города и все его циклические сдвиги (перестановки по кругу), получив таблицу 1. Затем, упорядочив эти «слова» по алфавиту, он составил таблицу 2 и выписал её последний столбец: ВКСАМО. Саша сделал то же самое с названием своего родного города и получил «слово» МТТЛАРАЕКИС. Что это за город, если его название начинается с буквы С? (10 баллов)

Ответ: СТЕРЛИТАМАК

Решение: Мы будем постепенно восстанавливать Сашину вторую таблицу.

Заметим сначала, что каждая буква встречается в каждом столбце столько же раз, сколько раз она встречается в слове. Поэтому буквы Сашиного города — **МТТЛАРАЕКИС**. Так как слова в таблице упорядочены по алфавиту, то в первом столбце эти буквы стоят в алфавитном порядке: **А, А, Е, И, К, Л, М, Р, С, Т, Т** (табл. 1).

Пусть теперь некоторая буква стоит в последнем столбце таблицы 2. Тогда в слове после неё будет идти буква, стоящая первой в этой строке. (При этом мы считаем, что после последней буквы идёт первая.) Из первой строки табл. 1 видно, что после буквы **М** идёт буква **А**, из второй и третьей — что после буквы **Т** один раз идёт **А**, а один раз — **Е**, и т. д.

Так как слова упорядочены по алфавиту, то в строчках с одинаковой первой буквой возможные вторые буквы упорядочены по алфавиту.

Воспользовавшись этим, мы можем заполнить и второй столбец (табл. 2). Из получившейся таблицы видно, что после пары букв **МА** идёт буква **К** (первая строчка), после пары **ТА** идёт **М** (вторая строчка), и т. д.

Можно, пользуясь этой информацией, заполнить третий столбец, потом четвёртый и т. д., пока не заполнится вся таблица. Но для решения задачи достаточно восстановить третью снизу строку (так как название города начинается с буквы **С**), что несложно сделать, зная, какая буква идёт за какой парой букв.

Таблица 1

М	О	С	К	В	А
А	М	О	С	К	В
В	А	М	О	С	К
К	В	А	М	О	С
С	К	В	А	М	О
О	С	К	В	А	М

Таблица 2

А	М	О	С	К	В
В	А	М	О	С	К
К	В	А	М	О	С
М	О	С	К	В	А
О	С	К	В	А	М
С	К	В	А	М	О

Таблица 1

А	*	*	*	*	*	*	*	*	*	М
А	*	*	*	*	*	*	*	*	*	Т
Е	*	*	*	*	*	*	*	*	*	Т
И	*	*	*	*	*	*	*	*	*	Л
К	*	*	*	*	*	*	*	*	*	А
Л	*	*	*	*	*	*	*	*	*	Р
М	*	*	*	*	*	*	*	*	*	А
Р	*	*	*	*	*	*	*	*	*	Е
С	*	*	*	*	*	*	*	*	*	К
Т	*	*	*	*	*	*	*	*	*	И
Т	*	*	*	*	*	*	*	*	*	С

Таблица 2

А	К	*	*	*	*	*	*	*	*	М
А	М	*	*	*	*	*	*	*	*	Т
Е	Р	*	*	*	*	*	*	*	*	Т
И	Т	*	*	*	*	*	*	*	*	Л
К	С	*	*	*	*	*	*	*	*	А
Л	И	*	*	*	*	*	*	*	*	Р
М	А	*	*	*	*	*	*	*	*	А
Р	Л	*	*	*	*	*	*	*	*	Е
С	Т	*	*	*	*	*	*	*	*	К
Т	А	*	*	*	*	*	*	*	*	И
Т	Е	*	*	*	*	*	*	*	*	С

3. Робот придумал шифр для записи слов: заменил некоторые буквы алфавита однозначными или двузначными числами, используя только цифры 1, 2 и 3 (разные буквы он заменял разными числами). Сначала он записал шифром сам себя: РОБОТ = 3112131233. Зашифровав слова КРОКОДИЛ и БЕГЕМОТ, он с удивлением заметил, что числа вышли совершенно одинаковыми! Потом Робот записал слово МАТЕМАТИКА. Напишите число, которое у него получилось. Обоснуйте свой ответ. (10 баллов)

Решение: Рассмотрим слово РОБОТ = 3112131233. В нём 5 букв и 10 цифр, так что все коды двузначные и определяются без труда. Напишем все двенадцать возможных кодов и те буквы, которые мы точно знаем: 1 = 11 = 21 = 31 = Р 2 = 12 = О 22 = 32 = 3 = 13 = Б 23 = 33 = Т. Теперь подумаем, как запишется слово КРОКОДИЛ = БЕГЕМОТ. Начинается оно с Б=13, то есть К=1. Теперь мы можем записать начало слова: КРОКО... = 13112112... Начинаем его читать как слово БЕГЕМОТ: Б = 13, Е = 6 1, то есть Е = 11, а тогда Г = 2, иначе второе Е не получается. Ну а М начинается на 2, то есть М = 2*. Теперь посмотрим на конец слова, там ...ОТ, то есть ...1233. Это значит, что Л = 3 и И = 23, а Д заканчивается на 1, то есть Д = *1. Звёздочка — единственная оставшаяся неразгаданной цифра. Разгадать её нетрудно: 31 = Р, 11 = Е, так что Д = *1 = 21. Тогда М = 22, и мы раскрыли почти весь шифр: 1 = К 11 = Е 21 = Д 31 = Р 2 = Г 12 = О 22 = М 32 = 3 = Л 13 = Б 23 = И 33 = Т. Теперь мы знаем всё, что нужно, чтобы записать шифром слово МАТЕМАТИКА, кроме одного — как шифруется буква А. Но раз Робот смог записать это слово, значит, для А должен найтись код. И этот код 32, ибо все остальные использованы.

Ответ: 2232331122323323132.

4. На доске 8×8 играют двое. Ходят по очереди. Первый всегда закрашивает одну клетку, а второй — «уголок» из трех соседних клеток. Дважды закрашивать клетку нельзя. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из них может выиграть независимо от игры противника? (10 баллов)

Решение: Разобьем доску на квадратики размера два на два. Если второй игрок будет закрашивать три клетки в квадрате, в который сходил первый, то он не проиграет (и, значит, выигрывает).



Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Челябинский государственный университет»
Математический факультет

**Интеллектуальный конкурс на кубок Главы города Челябинска
«Олимпиада по математике, информатике, криптографии
имени А.М. Ильина»**

7 класс

1. Пусть счастливые числа – это те числа, которые содержат только счастливые цифры 7 и 4. Найти количество нечётных счастливых чисел, не больших 44444. (10 баллов)

Решение: Число комбинаций K -значных чисел с 2 вариантами цифр = 2^K , $2^1+2^2+2^3+2^4=30$, нечётных среди них – половина, одно 5-значное число - чётное.

Ответ: 15.

2. Чтобы открыть сейф, нужно ввести код — число, состоящее из семи цифр: двоек и троек. Сейф откроется, если двоек больше, чем троек, а код делится и на 3, и на 4. Придумайте код, открывающий сейф. (10 баллов)

Решение: Так как двоек больше, чем троек, двоек может быть 4, 5, 6 или 7. В первом случае сумма цифр — 17, во втором — 16, в третьем — 15, а в последнем — 14. По признаку делимости на 3 число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3. Значит, годится только третий вариант. Итак, в коде 6 двоек и 1 тройка. По признаку делимости на 4 число, образованное последними двумя цифрами, должно делиться на 4. Значит, это 32.

Ответ: 2222232

3. Известный преступник профессор Мориарти долго скрывался от Шерлока Холмса и лондонской полиции. И вот однажды полицейским удалось перехватить телеграмму, которую Мориарти прислал сообщнику:

Встречай завтра поезд СТО вагон О

Инспектор Лестрейд уже распорядился было послать наряд полиции искать нулевой вагон сотого поезда, но тут принесли еще две перехваченные телеграммы на тот же адрес:

СЕКРЕТ – ОТКРОЙ = ОТВЕТ – ТВОЙ

СЕКРЕТ – ОТКРЫТ = 20010

Лестрейд задумался. А Холмс воскликнул: «Теперь ясно, какой поезд надо встречать!» Инспектор удивился. «Элементарно, Лестрейд! — пояснил сыщик. — Это же шифр. В этих примерах одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, разные — разные, а черточка — это минус! Мориарти едет в поезде № ...» Напишите номер поезда и вагона. Объясните, как мог рассуждать Холмс. (10 баллов)

Решение: Посмотрим на самую длинную телеграмму. Видно, что в правой и левой частях равенства в двух последних разрядах написано одно и то же: ЕТ – ОЙ. Это значит, что и в старших разрядах справа и слева будет одно и то же: СЕКР – ОТКР = ОТВ – ТВ. Теперь если выполнить вычитания, то и справа и слева сократятся по две буквы, то есть на концах будет по два нуля. Когда мы сократим на 100, получится вот что: СЕ – ОТ = О. Теперь посмотрим на последнюю телеграмму. Если записать ее как пример на сложение в столбик,

$$\begin{array}{r}
 \text{О Т К Р Ы Т} \\
 + \quad 2 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \\
 \hline
 \text{С Е К Р Е Т}
 \end{array}$$

то видно, что $OT + 2 = CE$. Сопоставив это с предыдущим равенством, мы понимаем, что $O = 2$, а тогда $C = 3$. Кроме того, при сложении произошел перенос из разряда единиц в разряд десятков, а поэтому $T = 8$ или $T = 9$. Однако, если предположить, что $T = 8$, то $E = 0$, а тогда при сложении $BT + 1 = E$ (то есть $BT + 1 = 0$) неизбежно произошел бы перенос в следующий разряд. Но этого не было, значит, $T = 9$. Мы узнали значения всех нужных букв.

Комментарий. Из решения следует также, что $E = 1$ и $B = 0$. Буквы К, Р, В, Й могут заменять любые четыре из пяти оставшихся цифр: 4, 5, 6, 7, 8, но номера поезда и вагона с ними не связаны.

Ответ: Поезд № 392, вагон № 2.

4. На доске 4×4 лежат монеты, причём четыре из них фальшивые более лёгкие (весят одинаково) и лежат в четырёх клетках образующих квадрат 2×2 . За наименьшее число взвешиваний на чашечных весах, найти все фальшивые монеты. (10 баллов)

Решение: Всего различных положений фальшивых монет - 9, а результатов одного взвешивания – три. Поэтому менее чем двумя взвешиваниями не обойтись. Как за два: сравнивая в «средней» горизонтальной полосе ширины 2 левую четверку с правой, определим, на левой половине, на правой, или «посередине», находятся фальшивые монеты. Аналогично, сравнивая в «средней» вертикальной полосе ширины 2 верхнюю четверку с нижней, определим, выше, или ниже, или посередине, располагаются фальшивые. В результате, положение фальшивых будет определено однозначно.

5. На доске написано 2017 единичек. Аня, Боря и Ваня ставят (по очереди: первой – Аня, затем – Боря, затем – Ваня, и т.д.) между единичками знаки сложения или умножения. После того как все промежутки между единичками заполнены, вычисляется полученное число. Если оно делится на три, то выигрывает Аня; если остаток от его деления на 3 равен 1, то выигрывает Боря, а если остаток равен 2, то выигрывает Ваня. Могут ли Аня и Ваня договориться играть так, чтобы всегда выигрывал(а) Аня? Ваня? Боря? (10 баллов)

Решение: Да,да,да. Заметим, что итоговое число на 1 больше количества знаков сложения. Ходов будет всего сделано 2016, так что последний ход сделает Ваня. За пару ходов (предпоследний ход Вани, и последний ход Ани) эта парочка может изменить количество плюсов на 0, 1 или 2. Поэтому, если желаемый для них остаток от деления на 3 равен z , то за эту пару ходов они смогут сделать остаток (от $1 +$ количество плюсов) равным $z-1$. Тогда на последний Борин ход «+» Ваня ответит умножением, а на умножение – сложением.

Ответ: Да. Да. Да.



Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Челябинский государственный университет»
Математический факультет

**Интеллектуальный конкурс на кубок Главы города Челябинска
«Олимпиада по математике, информатике, криптографии
имени А.М. Ильина»**

8 класс

1. Пусть счастливые числа – это те числа, которые содержат только счастливые цифры 7 и 4. Найти количество чётных счастливых чисел, не больших 44444. (10 баллов)

Решение: Число комбинаций K -значных чисел с 2 вариантами цифр = 2^K , $2^1+2^2+2^3+2^4=30$, чётных среди них – половина, одно 5-значное число - чётное.

Ответ: 16

2. Вадик написал название своего родного города и все его циклические сдвиги (перестановки по кругу), получив таблицу 1. Затем, Таблица 1
упорядочив эти «слова» по алфавиту, он составил таблицу 2 и выписал её последний столбец: Таблица 2
ВКСАМО. Валера сделал то же самое с названием своего родного города и получил «слово» ОССНГСОРСК. Что это за город, если его название заканчивается на букву **К**? (10 баллов)

М	О	С	К	В	А
А	М	О	С	К	В
В	А	М	О	С	К
К	В	А	М	О	С
С	К	В	А	М	О
О	С	К	В	А	М

А	М	О	С	К	В
В	А	М	О	С	К
К	В	А	М	О	С
М	О	С	К	В	А
О	С	К	В	А	М
С	К	В	А	М	О

Решение: аналогично классу 6

Ответ: СОСНОГОРСК

3. Каждую букву русского алфавита закодировали последовательностью из нулей и единиц (последовательности могут быть разной длины). Используя этот код, Сеня записал слово «СЛОН». Оказалось, что полученная последовательность нулей и единиц расшифровывается однозначно. Какое наименьшее количество цифр могло в ней быть? (10 баллов)

Ответ: 7 цифр.

Решение. Заметим, что меньшим числом символов обойтись нельзя. В самом деле, если цифр не больше 6, то какие-то две из четырёх букв должны быть закодированы последовательностью длины 1, то есть одна из них закодирована цифрой 0, а другая — цифрой 1. Но тогда можно расшифровать любую последовательность, используя только эти две буквы. Закодируем буквы, например, так:

С «10»

Л «11»

О «0»

Н «01»

Все остальные буквы закодируем разным количеством единиц, большим трёх. Нашему слову будет соответствовать последовательность 1011001. Буквы, закодированной «1», нет, а буква, начинающаяся с «10», ровно одна — «10». Таким образом, первая буква однозначно восстанавливается. Аналогично существует ровно одна буква, начинающаяся с «11», и не существует буквы, начинающейся с «110». Значит вторая буква тоже расшифрована. Буквы, код

которой начинается с «00», нет, значит третья буква закодирована символом «0». Если код четвертой буквы — «0», то пятая буква должна быть закодирована символом «1», а таких букв не бывает, значит четвертая буква закодирована «01».

4. Кооперативная игра: Каждому из двух игроков сообщают число (0 или 1). Если хотя бы один из игроков угадает число другого, команда получает 1 руб.; если оба не угадают, команда проигрывает. Какую тактику нужно выбрать, чтобы победить в игре? (Информацией обмениваться запрещено; числа могут совпадать; отвечают игроки одновременно; перед началом игры можно договориться о согласовании действий). (10 баллов)

Решение: Числа, полученные игроками, либо совпадают, либо различны. Поэтому, если первый игрок называет свое число, а второй – противоположное своему, то один из них угадает число другого.

5. На столе лежит куча из 2017 конфет. Из нее убирают одну конфету, и кучу делят на две (не обязательно поровну). Затем из какой-нибудь кучи, содержащей больше двух конфет, снова убирают одну конфету, и делят эту кучу на две. И так далее. Можно ли через несколько ходов оставить на столе только кучи, состоящие из трех конфет? (10 баллов)

Решение: Нет. Действительно, при каждой операции число «сумма количества конфет и количества куч» не меняется. Если бы в некоторый момент получилось n куч по три конфеты, то ЧИСЛО было бы равно $3n + n = 4n$. Но это ЧИСЛО равно $2017 + 1 = 2018$ - - не делится на 4.

Ответ: Нет.