Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Челябинский государственный университет»
Математический факультет

Интеллектуальный конкурс на кубок Главы города Челябинска «Олимпиада по математике, информатике и криптографии имени академика А.М. Ильина»

5-6 классы

Максимальное количество баллов - *40*

1. Чебурашке подарили коробку с 243 конфетами. Он знает, что в одну из конфет не доложили шоколада, и она легче остальных. Как ему за не более чем пять взвешиваний на рычажных весах найти эту фальшивую конфету?
   РЕШЕНИЕ
   Сначала надо разделить все конфеты на три равные кучки (по 81 конфете в каждой). За первое взвешивание надо сравнить любые из этих двух кучек. Та, что легче, содержит фальшивую конфеты. Если массы одинаковы, то фальшивая конфета в третьей кучке. Далее с кучкой, содержащей фальшивую конфету, надо поступить точно также – разделить ее на три равные части (по 27 конфет в каждой). Вторым взвешиванием определяется какая часть содержит фальшивую. Далее ее делим на части по 9 конфет (и делаем для них третье взвешивание), потом на части по 3 (делаем четвертое) и, наконец, пятым взвешиванием находим фальшивую конфету.

2. Клетчатый квадрат 21×21 перегибали по линиям сетки пока не получился квадратик 1×1. Этот квадратик разрезали по диагонали. На сколько частей оказался разрезан исходный квадрат?
   ОТВЕТ: на 242 части.
   РЕШЕНИЕ
   Покрасим горизонтальные линии сетки, чередуя цвета, в красный и черный цвет: нижнюю – в красный, следующую линию – в черный, и т.д.; верхняя окажется черной. Аналогично, вертикальные линии покрасим в синий-зеленый цвета. Заметим, что при складывании прямоугольника по линиям сетки, все линии накладываются на линии того же цвета. Поэтому в единичном квадратике все его стороны будут состоять из линий одного цвета. Пусть разрез был проведен по диагонали, идущей из черно-зеленой вершины в красно-синюю (второй случай - аналогичен). Это означает, что на исходном квадрате произведены разрезы по всем «диагональным» линиям, проходящим через узлы с такими же парами цветов. Видим: к каждой стороне примыкает маленький треугольник (площади 0,5) и 10 больших треугольников (единичной площади), всего 42 треугольника (ибо малые учитывались дважды). Они занимают 41 единицу площади. Оставшиеся фигурки – квадратики (площади 2), и из баланса площадей находим, что их ровно 200. Итого: 242.

3. Робот Копатыч умеет копать только прямоугольные грядки длиной 4 и шириной 3.
   А) Какое самое большое число целых грядок Копатыч может вскопать на огороде длиной 2017 и шириной 2018 и тропинками между грядками ширины 1 (по краю огорода тропинки не нужны)?
   Б) С помощью команд (копать, не копать, вправо, влево, вниз, вверх) научите Копатыча вскапывать огород 10×11 грядками 4×3.
   ОТВЕТ: А) 203112
   РЕШЕНИЕ
   А) В общем виде решение будет иметь вид $\left[\frac{A+1}{m+1}\right]\times\left[\frac{B+1}{n+1}\right]$, где А – длина огорода, В – ширина огорода, m – длина грядки, n – ширина грядки. В конкретном случае при А = 2017, В= 2018, m = 4, n = 3 получаем 403·504=203112.
   Требуется учесть не только ширину (длину) грядки, но и ширину (длину) межгрядовой тропинки.

Поэтому к знаменателю прибавляем 1. Так как по краю огорода тропинки не требуются, то тропинка от последней грядки может вылезти за огород ровно на ширину (длину) тропинки – к числителю так же прибавляем 1.

4. У царя было 7 наследников, и он завещал им править всеми своими крепостями. Самому младшему он дал несколько крепостей, более старший сын получил вдвое больше, чем самый младший, следующий - втрое больше крепостей, чем самый младший, и так далее, а самый старший сын получил в 7 раз больше, чем самый младший сын. Однако, царица любила всех сыновей одинаково и подумала, что такое распределение крепостей несправедливое, и она предложила следующее: каждый из вас должен отдать по 2 крепости каждому из ваших младших братьев, и только младший сын должен оставить у себя все свои полученные крепости. В результате каждый из сыновей получил одинаковое количество крепостей. Сколько всего крепостей было у царя?
   ОТВЕТ: 112 крепостей.
   РЕШЕНИЕ
   Примем количество крепостей, доставшихся младшему сыну, за 1 часть.
   Тогда, числа ряда: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7 показывают, сколько частей досталось каждому сыну, начиная с младшего.
   Все наследство составляет $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$ частей.
   После вмешательства королевы каждый из сыновей получил одинаковое количество крепостей, или $28 : 7 = 4$ части.
   Младший сын получил от каждого из шести братьев по 2 крепости, т.е. количество крепостей у него увеличилось на $2 \cdot 6 = 12$ (крепостей). А количество частей у него увеличилось на $4 - 1 = 3$ части.
   Следовательно, 1 части соответствует $12 : 3 = 4$ крепости, а все наследство составляет $4 \cdot 28 = 112$ крепостей.