



**РЕГИОНАЛЬНЫЙ КОНКУРС ШКОЛЬНИКОВ
ЧЕЛЯБИНСКОГО УНИВЕРСИТЕТСКОГО
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ОКРУГА
ПО МАТЕМАТИКЕ, ИНФОРМАТИКЕ И КРИПТОГРАФИИ**

2018 г.

ОЧНЫЙ ТУР

10 класс

Максимальное количество баллов - 80

- 1 Испорченная вирусом электронная шахматная доска работает теперь следующим образом. При нажатии на любую клетку, эта клетка, а также и все клетки, расположенные слева, ниже, или слева-ниже от нее, меняют свой цвет на противоположный. Так, при нажатии на клетку из левого нижнего угла, перекрашивается только она, а при нажатии на клетку из правого верхнего угла, перекрашиваются все клетки. Изначально доска имела обычную шахматную раскраску (левая нижняя клетка - черная). Можно ли сделать всю доску белой? Какое наименьшее число нажатий для этого потребуется? (*максимум 10 баллов*)

ОТВЕТ: Да, 15.

РЕШЕНИЕ

Результат не зависит от порядка нажатий. Двойное нажатие на клетку ничего не меняет, так что на каждую клетку будем нажимать не более одного раза. Верхняя правая клетка – черная, так что на нее надо нажать. Тогда соседняя с ней (слева) перекрашивается, и ее тоже надо нажать. Тогда соседняя с ней (слева) перекрасится два раза, и ее также следует нажать. Рассуждая таким образом, приходим к выводу, что надо нажать на все клетки верхней горизонтали. Аналогичное утверждение получим для клеток правой вертикали. Осталось заметить, что после нажатия всех этих 15 клеток, вся доска стала белой.

- 2 Решить уравнение $(x^2 - 2x + 2)^2 - 2(x^2 - 2x + 2) + 2 = x$ (*максимум 10 баллов*)

ОТВЕТ: Два решения: 1 и 2.

РЕШЕНИЕ

Положим $x^2 - 2x + 2 = y$. Тогда исходное уравнение примет вид $y^2 - 2y + 2 = x$. Вычитая одно равенство из другого, после разложения на множители получим $(x - y) \cdot (x + y - 2) = 0$, откуда находим: $x = y$, или $x + y = 2$. В обоих случаях получаются квадратные уравнения, решая которые, найдем все корни.

Замечание. Можно было также «угадать» (любым способом) пару корней, и показать – после «деления уголко», что других корней нет.

- 3 В окружности радиуса 25 проведена хорда АВ, и перпендикулярный ей диаметр CD. Окружность радиуса r касается отрезка АВ и дуги ADB. Найти длину касательной, проведенной из точки С к малой окружности, если расстояние от центра большой окружности до точки пересечения хорды и диаметра равно 7. (*максимум 15 баллов*)

ОТВЕТ: 40 или 30.

РЕШЕНИЕ

Пусть O – центр большой окружности, X – центр малой, Q – точка пересечения хорды и диаметра, P – точка касания малой окружности и хорды. Пусть $QP = a$. В случае, когда точка Q лежит на отрезке OD, по теореме Пифагора имеем: $a^2 + (7 + r)^2 = (25 - r)^2$, $CX^2 = a^2 + (25 + 7 + r)^2$, а квадрат длины искомой касательной равен $x^2 = CX^2 - r^2$. С учетом первых двух равенств, получим $x^2 = -r^2 + (32 + r)^2 + (25 - r)^2 - (7 + r)^2 = 1600$, $x = 40$. Аналогично рассматривается и второй случай.

- 4 Кристоша придумал следующий способ перестановки букв в текст, состоящем из 22 букв и записанном без пробелов, для того, чтобы никто не смог прочесть его: 22-я буква

поставлена на 1-е место, 1-я буква – на 2-е место, 21-я – на 3-е место, 2-я – на 4-е и так далее, в конце 12-я буква поставлена на 21-е место, 11-я – на 22-е. Однако он обнаружил, что он может легко прочитать текст, поэтому он применил эту перестановку букв еще 13 раз. В результате у него получился такой текст **ЙТУЧИЕНЕКТИЛСИВЯНСЕБИР**. Попробуйте прочитать исходный текст Кристоши. (максимум 10 баллов)

ОТВЕТ: ЧЕЛЯБИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

РЕШЕНИЕ

Сначала нам надо записать таблицу перестановки букв, потом надо посмотреть длину цикла для первой буквы (можно потом убедиться, что для остальных букв длина цикла совпадет), 1 - 2 - 4 - 8 - 16 - 13 - 19 - 7 - 14 - 17 - 11 - 22 - 1. Длина цикла равна 12, то есть за 12 раз применения такого преобразования буквы встанут на исходную позицию. Всего было применено 14 перестановок, значит, чтобы нам получить исходную позицию нужно все сделать 2 шага назад в таблице перестановки, например, 3 - 21 - 12, то есть 3 буква в переставленном тексте встанет на 12 позицию в исходном.

- 5 Снежная Королева выдала Каю строку из прописных букв и приказала составить из них слово «ВЕЧНОСТЬ». Напишите программу, которая считывает исходную строку и печатает оставшиеся неиспользованными символы, если приказ выполним, или недостающие для выполнения приказа символы, если приказ невозможно выполнить. В обоих случаях символы можно выводить в любом порядке.

Пример ввода 1: «БЕСЧЕЛОВЕЧНОСТЬ». Пример вывода 1: «БЕСЧЕЛО».

Пример ввода 2: «ВЛЕСУРОДИЛАСЬЁЛОЧКА». Пример вывода 1: «НТ».

Язык программирования на выбор участника. (максимум 15 баллов)

РЕШЕНИЕ

В строке ВЕЧНОСТЬ - K=8 разных символов. Следует в цикле по символам из строки ВЕЧНОСТЬ искать их в заданной строке, удаляя их, если нашли, или добавляя в строку ненайденных в противном случае. Выводим строку ненайденных, если она не пуста, или строку оставшихся символов.

Пример программы на языке Python:

```
s=input()
t=""
for c in 'ВЕЧНОСТЬ':
    k=s.find(c)
    if k!=-1: t=t+c
    else: s=s[:k]+s[k+1:]
if len(t)>0: print(t)
else: print(s)
```

Тесты

№	Ввод	Правильный вывод	Баллы
1	БЕСЧЕЛОВЕЧНОСТЬ	БЕЛЕЧОС	1
2	ВЛЕСУРОДИЛАСЬЁЛОЧКА	НТ	1
3	!!!	ВЕЧНОСТЬ	3
4	ЬТСОНЧЕВ		3
5	ТТССООННЧЧЕЕВВ	Ь	3
6	ТТССООННЧЧЕЕВВЬ	ТСОНЧЕВ	4

- 6 Структуральные лингвисты называют строки, начинающиеся и заканчивающиеся одним и тем же символом, особыми (например, «копейск»). Напишите программу, которая считывает исходную строку из прописных латинских букв и печатает количество разных самых длинных особых подстрок в ней.

Пример ввода 1: «ETERNITY». Пример вывода 1: «1».

Пример ввода 2: «ABCDEF». Пример вывода 2: «6».

Язык программирования на выбор участника. (максимум 20 баллов)

РЕШЕНИЕ

Следует в цикле по символам из исходной строки искать расстояния до их самых правых вхождений. При повторении максимума увеличиваем счётчик максимумов. При появлении нового максимума счётчик максимумов сбрасываем до 1.

Пример программы на языке Python:

```
s=input()
k=0
m=0
for i in range(len(s)):
    d=s.rfind(s[i])-i
    if d>k:
        k=d
        m=1
elif d==k: m+=1
print(m)
```

Тесты

№	Ввод	Правильный вывод	Баллы
1	ETERNITY	1	1
2	ABCDEF	6	1
3	ABCABCABCABC	3	4
4	ABCDEFHGHI	1	4
5	ABABCD CD	4	5
6	ABABABCD CD	3	5