



**РЕГИОНАЛЬНЫЙ КОНКУРС ШКОЛЬНИКОВ
ЧЕЛЯБИНСКОГО УНИВЕРСИТЕТСКОГО
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ОКРУГА
ПО МАТЕМАТИКЕ, ИНФОРМАТИКЕ И КРИПТОГРАФИИ**

2018 г.

ОЧНЫЙ ТУР

11 класс

Максимальное количество баллов - 85

1. Испорченная вирусом электронная шахматная доска работает теперь следующим образом. При нажатии на любую клетку, эта клетка, а также соседние с ней клетки, расположенные слева, ниже, или слева-ниже от нее, меняют свой цвет на противоположный. Так, при нажатии на клетку из левого нижнего угла, перекрашивается только она, а при нажатии на клетку из правого верхнего угла, перекрашиваются клетки квадратики два на два. Изначально доска имела обычную шахматную раскраску (левая нижняя клетка - черная). Можно ли сделать всю доску белой? Какое наименьшее число нажатий для этого потребуется?
(максимум 10 баллов)

ОТВЕТ: Можно, 24.

РЕШЕНИЕ

Результат не зависит от порядка нажатий. Двойное нажатие на клетку ничего не меняет, так что на каждую клетку будем нажимать не более одного раза. Верхняя правая клетка – черная, так что на нее надо нажать. Тогда соседняя с ней (слева) перекрашивается, и ее тоже надо нажать. Тогда соседняя с ней (слева) перекрасится один раз, ее нажимать не будем. Следующая – белая, ее тоже не нажимаем. Для четырех оставшихся клеток верхней горизонтали те же рассуждения дают аналогично еще 2 нажатия. С учетом этого, для седьмой горизонтали получим необходимость нажатия клеток h7, f7, d7 и b7, для шестой – g6, f6, c6 и b6, на пятой – нажимать не надо. Тогда для оставшихся четырех горизонталей, все повторяется. Итого – необходимо минимум 24 нажатия. И они приведут к цели.

2. Решить уравнение $\arctg x + \arctg 2x + \arctg 4x + \arctg 8x = \pi$ (максимум 10 баллов)

ОТВЕТ: $x = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

РЕШЕНИЕ

Функция из левой части уравнения строго монотонна, так что решений – не более одного. Угадаем его. Для этого заметим, что $x \cdot 8x = 2x \cdot 4x$, а из формул дополнения следует, что сумма арктангенсов двух взаимно обратных (положительных) чисел равна $\frac{\pi}{2}$. Поэтому (положительный) корень уравнения $8x^2 = 1$ подходит.

3. На плоскости нарисовали треугольник со сторонами 5, 12 и 13. Каждая точка на сторонах треугольника освещает круг радиуса 1 с центром в этой точке. Найдите площадь освещенной части плоскости. (максимум 15 баллов)

ОТВЕТ: $52,5 + \pi$

РЕШЕНИЕ

Этот треугольник – прямоугольный. Его площадь равна 30, а периметр равен 30, так что радиус вписанной окружности равен 2. Поэтому внутри треугольника есть неосвещенные точки, и они образуют треугольник. Расстояние от центра вписанной окружности до сторон треугольника равно 2; стороны неосвещенного треугольника получены сдвигом сторон исходного на 1. Поэтому расстояние от центра вписанной окружности до сторон неосвещенного треугольника равно $2-1=1$, так что центры вписанных окружностей у этих двух треугольников совпадают. Неосвещенный треугольник подобен исходному, и коэффициент подобия равен отношению радиусов вписанных окружностей (т.е. 1:2).

Поэтому площадь неосвещенного треугольника в 4 раза меньше площади исходного (и равна 7,5). Поэтому, площадь освещенной части внутри исходного треугольника равна $30 - 7,5 = 22,5$. Освещенная часть вне треугольника состоит из трех полосок ширины 1 и суммарной длины 30, примыкающих к сторонам треугольника (общей площади 30), и трех секторов – около его вершин. Сдвинув эти три сектора вместе, получим круг единичного радиуса (площади π). Поэтому площадь освещенной части плоскости равна $22,5 + 30 + \pi$.

4. В одном классе Антон, Борис и Семен решили использовать надежный способ генерации ключи для шифрования своих пересылаемых сообщений. Для этого они случайным образом выбрали целые коэффициенты a, b, c и составили многочлен от двух переменных x, y :

$$f(x, y) = ax^2 + bx + cx + by + ay^2,$$

где коэффициенты a, b, c хранились в секрете, но Тимофею стало известно, что при всех целых x выполняется равенство $r_{173}(f(x, k_A)) = r_{173}(x^2 + 36x + 59)$. Здесь $r_{173}(z)$ – остаток от деления числа z на 173. Также они выбрали секретные ключи, различные целые числа k_A, k_B, k_C , и которые имеют различные остатки при делении на 173.

Теперь Антон может вычислить новые ключи k_{AB} и k_{AC} для шифрования передаваемых сообщений Борису и Семену по следующим формулам:

$$k_{AB} = r_{173}(f(k_A, k_B)), \quad k_{AC} = r_{173}(f(k_A, k_C)),$$

При этом Борис вычисляет такой ключ для шифрования сообщения Семену $k_{BC} = r_{173}(f(k_B, k_C))$.

Тимофею случайно стали известны ключи: $k_A = 17, k_{AB} = k_{AC} = 52$. И он легко смог вычислить ключ k_{BC} . А вы сможете найти, чему равен этот ключ k_{BC} ? (максимум 10 баллов)

ОТВЕТ: 169

РЕШЕНИЕ

Сначала найдем коэффициенты a, b, c .

Известно, что

$$x^2 + 36x + 59 = ax^2 + bx + 17 \cdot c \cdot x + b \cdot 17 + a \cdot 17^2.$$

Сразу $a=1$, затем $17b + 116a = 59$, отсюда $17b = 116(173) = 116 + 173, b=17$.

А с найдем из $b + 17c = 36$ или $17c = 19(173) = 19 + 5 \cdot 173$. И $c=52$

Итого, $f(x, y) = x^2 + 17x + 52xy + 17y + y^2$. По заданию нам надо найти

$$k_b^2 + 17 k_b + 52 k_b \cdot k_c + 17 k_c + k_c^2.$$

Но нам известны $k_A = 17, k_{AB} = k_{AC} = 52$, то есть

$$f(k_A=17, k_C)=17^2 + 17 \cdot 17 + 52 \cdot 17 \cdot k_C + 17 k_C + k_C^2 = 52, \quad k_C^2 + 36 k_C + 7 = 0$$

$$f(k_A=17, k_B)=17^2 + 17 \cdot 17 + 52 \cdot 17 \cdot k_B + 17 k_B + k_B^2 = 52, \quad k_B^2 + 36 k_B + 7 = 0$$

Теперь вычтем и сложим два уравнения

$$(k_C - k_B)(k_C + k_B) + 36 (k_C - k_B) = 0,$$

$$(k_C - k_B)(k_C + k_B + 36) = 0,$$

$$(k_C - k_B) \neq 0.$$

Значит $k_C + k_B + 36 = 0$ или $k_C + k_B = -36$

$$k_C^2 + k_B^2 + 36(k_C + k_B) + 14 = 0, \quad k_C^2 + k_B^2 = 36 \cdot 36 - 14.$$

Нам нужно найти $k_C \cdot k_B$.

Поэтому

$$(k_C + k_B)^2 - (k_C^2 + k_B^2) = 2 k_C \cdot k_B. \quad 36^2 - 36^2 + 14 = 2 k_C \cdot k_B.$$

То есть $k_C \cdot k_B = 7$

Теперь мы можем найти

$$k_b^2 + 17 k_b + 52 k_b k_c + 17 k_c + k_c^2 = 36^2 - 14 + 17 \cdot (-36) + 52 \cdot 7 = 169.$$

5. Структуральные лингвисты называют строки, начинающиеся и заканчивающиеся одним и тем же символом, особыми (например, «копейск»). Напишите программу, которая считывает исходную строку из прописных латинских букв и печатает количество разных неодносимвольных особых подстрок в ней.

Пример ввода 1: «ETERNITY». Пример вывода 1: «2».

Пример ввода 2: «ABCDEF». Пример вывода 2: «0».

Язык программирования на выбор участника. (максимум 15 баллов)

РЕШЕНИЕ

Перебирая все возможные неодносимвольные подстроки исходной строки будем добавлять в множество те, что начинаются и заканчиваются на одну и ту же букву. Ответом будет количество элементов в множестве.

Пример программы на языке Python:

```
s=input()
m=set()
for i in range(len(s)):
    for j in range(i+1,len(s)):
        if s[i]==s[j]: m.add(s[i:j+1])
print(len(m))
```

Тесты

| № | Ввод | Правильный вывод | Баллы |
|---|--------------|------------------|-------|
| 1 | ETERNITY | 2 | 1 |
| 2 | ABCDEF | 0 | 1 |
| 3 | ABCABCABCABC | 9 | 4 |
| 4 | ABCDEFGHGI | 1 | 4 |
| 5 | ABABCDCDAC | 8 | 5 |

6. Под небом голубым есть город золотой, где зачарованные жители гордятся своим величием. Для поддержания чар хранители ежедневно высвечивают для жителей на большой стене новую мудрую строку, и, чем длиннее эта строка, тем сильнее чары. Но чары могут рассеяться, если из символов мудрой строки может быть составлена тайная строка горькой правды. Для этого, если какой-то символ тайной строки встречается в ней несколько раз, то и число его вхождений в мудрую строку должно быть не меньше. Напишите для охранителей программу, позволяющую вводить тайную строку и исходную мудрую строку (обе - из прописных латинских букв) и печатать безопасную мудрую строку с минимальными исправлениями. Если равноценных вариантов исправления несколько, печатать любой из них.

Пример ввода 1:

FREE

WEARETHECHAMPIONS

Пример вывода 1:

WEARETHECHAMPIONS

Пример ввода 2:

FREE

WEARETHEGREATESTWEARETHEFASTEST

Пример вывода 2:

WEARETHEGREATESTWEARETHEASTEST

Язык ввода на выбор участника. (максимум 25 баллов)

РЕШЕНИЕ

Заведём счётчики, в которых подсчитаем, сколько раз каждый символ входит в мудрую строку. Затем переберём все символы горькой строки, каждый раз уменьшая на 1 соответствующий счётчик, если он есть, а если нет, заведём его со значением -1. Затем

выберем символ с минимальным значением счётчика и будем этот символ удалять из мудрой строки до тех пор, пока его счётчик не станет отрицательным.

Пример программы на языке Python:

```
gp=input()
ms=input()
m=dict()
for c in ms:
    if c in m: m[c]+=1
    else: m[c]=1
for c in gp:
    if c in m: m[c]-=1
    else: m[c]=-1
k=gp[0];
for c in gp[1:]:
    if m[c]<m[k]: k=c;
while m[k]>=0:
    c=ms.find(k)
    ms=ms[:c]+ms[c+1:]
    m[k]-=1
print(ms)
```

Тесты

| № | Ввод | Правильный вывод | Баллы |
|---|---|------------------------------------|-------|
| 1 | FREE WEARETHECHAMPIONS | WEARETHECHAMPIONS | 1 |
| 2 | FREE WEARETHEGREATESTWEARETHE FASTEST | WEARETHEGREATESTWEARETHEAS TEST | 1 |
| 3 | BEE TOBEORNOTOBE | TOBORNOTOBE | 4 |
| 4 | BABA ABRAKADABRA | ARAKADABRA | 4 |
| 5 | ABCDEE ABCDEABCDE | ABCDABCDE | 5 |
| 6 | ABCD ABCDABCDABCD | BCDBCDBC | 5 |
| 7 | ABCD ABCDABCDABC | ABCABCABC | 5 |