Конспект лекций по теории случайных процессов

А.А. Соловьев

В предлагаемом конспекте лекций рассматриваютя такие разделы теории случайных процессов как дискретные цепи Маркова, пуассоновские процессы, процессы гибели и размножения, системы массового обслуживания с потерями и ожиданием, а также гауссовские случайные процессы. При подготовке лекций использовались источники [1 - 15].

Оглавление

Глава 1

Случайные процессы

1.1. Дискретные цепи Маркова

Пусть состояние системы описывается точкой фазового пространства $E = \{e_1, \dots, e_r\}$. Далее состояние системы будем обозначать числами $1, \dots, r$. Предположим, что время t дискретно и принимает значения $0, 1, \dots, T$, $T \leqslant +\infty$. Эволюция изучаемой системы описывается траекторией $\omega = (\omega_0, \dots, \omega_T)$, где $\omega_t = i$, если в момент времени t система находилась в состоянии i. Введем вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{U}, \mathcal{P}$, в котором пространство элементарных событий $\Omega = \{\omega\}$ состоит из всевозможных реализаций системы, $\mathcal{U}$ – алгебра всех подмножеств и вероятность P задается элементарными вероятностями $P\{\omega\}$. Введем последовательность случайных величин $\{\xi_t\}$, полагая $\xi_t(\omega)$ равным положению ω_t системы в момент времени t. Вероятности $P\{\omega_t = i\}$ могут зависеть от того, в каких состояниях была система в предыдущих $(t-1)$-м испытании. Если эти вероятности при фиксированном исходе ω_t зависят от исхода $t-1$–го испытания и не зависят от исходов остальных $(t-2)$-х испытаний, то последовательность случайных величин $\{\xi_t\}$ называется *цепью Маркова*

$$\mathbf{P}\{\omega_t = j | \omega_0 = i_0, \omega_1 = i_1, \dots, \omega_{t-2} = i_{t-2}, \omega_{t-1} = i\} = \mathbf{P}\{\omega_t = j | \omega_{t-1} = i\} = p_{ij}^t.$$

Будем предполагать, что в начальный момент времени задано некоторое начальное распределение $\omega_0 : P\{\omega_0 = j\} = p_j^0$, $\sum_{j=1}^r p_j^0 = 1$. В последующие целочисленные моменты времени система меняет свое состояние, при этом вероятность в момент времени t для системы попасть в состояние $\omega_t = i$ зависит только от того, в каком состоянии находилась система в предыдущий момент времени. Вероятность $\mathbf{P}\{\omega\}$ определяется равенством

$$\mathbf{P}\{\omega\} = \mathbf{P}\{(\omega_0, \dots, \omega_T)\} = \mathbf{P}\{\omega_0\} \prod \mathbf{P}\{\omega_t | \omega_{t-1}\}\,.$$

Пример 1. (Блуждание с поглощением и отражением) Рассмотрим блуждание частицы по целым точкам от 0 до a. Если в момент t частица находится в положении k, $0 < k < a$, то в последующий момент времени с вероятностью $1/2$ переходит в положение $k-1$ или $k+1$. Если $k = 0$ или a, то частица остается в точке k с вероятностью 1. Такой процесс будем называть *блужданием с поглощением.* Если ξ_n – положение частицы в момент времени n. то последовательность $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$ образует цепь Маркова. Таким блужданием можно описывать игру с бросанием правильной монеты; попадание в 0 или a будет означать разорение одного из игроков.

Если частица из точки 0 с вероятностью 1 переходит в 1, а из положения a с вероятностью 1 в точку $a-1$, то блуждание называется *блужданием с отражением.*

Если p_{ij}^t не зависят от t, то цепь Маркова называется однородной. Только такие цепи Маркова будем в дальнейшем рассматривать.

Для конечной цепи Маркова ($T < \infty$) вероятности p_{ij} образуют матрицу $[P] =\| p_{ij} \|$ со свойствами $p_{ij} \geqslant 0$ и $\sum_j p_{ij} = 1$ для всех i. Матрицы с указанными свойствами называются *стохастическими.*

Введем обозначения: $p_{ij}(k) = P\{\omega_k = j | \omega_0 = i\}$ и $[P(k)] =\| p_{ij}(k) \|$. Из формулы полной вероятности следует

$$p_{ij}(k) = \sum_{s=1}^r P\{\omega_{k-1} = s | \omega_0 = i\} p_{sj} = \sum_{s=1}^r p_{is}(k-1) p_{sj}\,.$$

Поэтому $[P(k)] = [P(k-1)]\,[P]$, а значит, $[P(k)] = [P]^k$. Отсюда следует, что

$$P\{\omega_{k+n} = j|\omega_n = i\} = P\{\omega_k = j|\omega_0 = i\}\,.$$

и

$$p_{ij}(t+s) = \sum_{k=1}^{r} p_{ik}(t)p_{kj}(s)\,.$$

Таким образом, цепь Маркова $\{\xi_t\}$ характеризуется вектором начальных вероятностей $(p_1^0, \ldots$ $\ldots, p_r^0)$ и матрицей $[P]$ переходных вероятностей с элементами $p_{ij} = P\{\xi_{t+1} = j|\xi_t = i\}$.

Теорема 1.1 (о предельных вероятностях). *Если при некотором t_0 все элементы матрицы $[P(t_0)]$ положительны, то существует предел $\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = p_j$, $j = 1, \ldots, r$. Предельные вероятности p_j не зависят от начального состояния i и являются единственным решением системы*

$$\sum_{k=1}^{r} x_k\, p_{kj} = x_j\,, \quad j = 1, \ldots, r\,, \quad \sum_{j=1}^{r} x_j = 1\,.$$

Доказательство. Введем обозначения:

$$M_j(t) = \max_i\{p_{ij}(t)\}, \quad m_j(t) = \min_i\{p_{ij}(t)\}\,.$$

Ясно, что

$$m_j(t) \leqslant p_{ij}(t) \leqslant M_j(t)\,.$$

По формуле полной вероятности

$$p_{ij}(t+1) = \sum_k p_{ik}p_{kj}(t)\,.$$

Учитывая стохастичность матрицы $[P]$, нетрудно видеть, что

$$m_j(t) \leqslant p_{ij}(t+1) \leqslant M_{ij}(t)\,.$$

Отсюда находим

$$m_j(t) \leqslant m_j(t+1) \leqslant M_j(t+1) \leqslant M_j(t)\,.$$

Поэтому существуют пределы $\lim_{t\to\infty} m_j(t)$ и $\lim_{t\to\infty} M_j(t)$. Докажем, что пределы совпадают. Пусть i и j таковы, что

$$p_{ik}(t+t_0) = M_k(t+t_0) \quad \text{и} \quad p_{jk}(t+t_0) = m_k(t+t_0)\,.$$

Воспользуемся представлениями

$$M_k(t+t_0) = p_{ik}(t+t_0) = \sum_{\ell=1}^{r} p_{i\ell}(t_0)p_{\ell k}(t)$$

и

$$m_k(t+t_0) = p_{jk}(t+t_0) = \sum_{\ell=1}^{r} p_{j\ell}(t_0)p_{\ell k}(t)\,.$$

Вычтем из первого равенства второе

$$M_k(t+t_0) - m_k(t+t_0) = \sum_{\ell=1}^{r} \big(p_{i\ell}(t_0) - p_{j\ell}(t_0)\big)p_{\ell k}(t)\,.$$

Разобьем сумму $\sum$ на сумму $\sum^+$ неотрицательных слагаемых и $\sum^-$ отрицательных слагаемых. Тогда

$$M_k(t+t_0) - m_k(t+t_0) \leqslant M_k(t)\sum_{\ell}^{+}\big(p_{i\ell}(t_0) - p_{j\ell}(t_0)\big) + m_k(t)\sum_{\ell}^{-}\big(p_{i\ell}(t_0) - p_{j\ell}(t_0)\big)\,. \tag{1.1}$$

Так как $0 = \sum_{\ell=1}^{r}\big(p_{i\ell}(t_0) - p_{j\ell}(t_0)\big) = \sum^+ + \sum^-$, то $\sum^- = -\sum^+$. Обозначим через d_{ij} сумму

$$d_{ij} = \sum_{\ell}^{+}\big(p_{i\ell}(t_0) - p_{j\ell}(t_0)\big)\,.$$

Из условий теоремы следует, что $d_{ij} < 1$, поэтому $d = \max d_{ij} < 1$. Из (1.1) теперь получаем

$$M_k(t+t_0) - m_k(t+t_0) \leqslant d(M_k(t) - m_k(t)),$$

Тогда

$$M_k(t) - m_k(t) \leqslant d^{\left[\frac{t}{t_0}\right]} \to 0$$

при $t \in \infty$. Отсюда следует существование предела $\lim\limits_{t\to\infty} p_{ik}(t) = p_k$, так как $m_k(t) \leqslant p_{ik}(t) \leqslant M_k(t)$. Далее, в уравнении

$$p_{ij}(t+1) = \sum_{k=1}^{r} p_{ik}(t)p_{kj}$$

перейдем к пределу и получим

$$p_j = \sum_{k=1}^{r} p_k p_{jk}, \quad j = 1, \ldots, r, \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{r} p_j = 1\,. \tag{1.2}$$

Пусть $x_1, \ldots, x_r$ удовлетворяют системе уравнений (1.2). Индукцией доказывается, что

$$x_j = \sum_{k=1}^{r} x_k p_{kj}(t)$$

при любом t. В самом деле,

$$\sum_{k=1}^{r} x_k p_{kj}(t+1) = \sum_{k=1}^{r} x_k \sum_{\ell=1}^{r} p_{k\ell}p_{\ell j}(t) = \sum_{\ell=1}^{r}\Big(\sum_{k=1}^{r} x_k p_{k\ell}\Big)p_{\ell j}(t) = \sum_{\ell=1}^{r} x_\ell p_{\ell j}(t) = x_j\,.$$

Переходя к пределу при $t \to \infty$, получаем

$$x_j = \sum_{k=1}^{r} x_k p_j = p_j\,.$$

Теорема доказана. □

Замечание. В частности, доказано, что

$$|p_{ij}(t) - p_j| \leqslant d^{\left[\frac{t}{t_0}\right]}.$$

Из равенства

$$p_i(t) = P\{\xi_t = i\} = \sum_{k=1}^{r} p_k^0 p_{ki}(t)$$

учитывая, что $p_{ki}(t) \to p_i$ при $t \to \infty$, получаем $p_i(t) \to p_i$ и предел не зависит от распределения вероятностей.

Замечание. Теорема о предельных вероятностях допускает обобщение. Предположим, что существует хотя бы одно состояние j_0, куда возможен переход из любого состояния i за время h с соответствующими вероятностями

$$p_{ij_0}(h) \geqslant \delta > 0$$

(в этом условии h одно и то же для всех i). При этом предположении доказывается существование единственного стационарное предельное распределение $p_i = \lim_{t\to\infty} p_i(t)$.

Числа p_j являются вероятностями попадания системы в j-е состояние через большой промежуток времени. При этом оказывается, что эти вероятности не зависят от начального состояния системы.

Введем обозначения:

$$f_j(n) = P\{\xi_n = j, \xi_{n-1} \neq j, \ldots, \xi_1 \neq j | \xi_0 = j\} \quad F_j = \sum_{n=1}^{\infty} f_j(n)\,.$$

Здесь $f_j(n)$ – вероятность, что система, выйдя из j-го состояния, впервые вернется в него на n-ом шаге, F_j – вероятность, что система, выйдя из j-го состояния, вновь когда-нибудь вернется в него.

Состояние системы называется возвратным, если $F_j = 1$ и невозвратным, если $F_j < 1$.

Теорема 1.2. *Состояние $j \in E$ возвратно тогда и только тогда, когда*

$$P_j = \sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}(n) = \infty\,.$$

Для невозвратного состояния $j \in E$

$$F_j = \frac{P_j}{1 + P_j}.$$

Доказательство. Пусть $f_j(0) = 1$. По формуле полной вероятности

$$p_{jj}(n) = f_j(1)p_{jj}(n-1) + f_j(2)p_{jj}(n-2) + \cdots + f_j(n-1)p_{jj}(1) + f_j(n)\,. \tag{1.3}$$

Введем производящие функции последовательностей $p_{jj}(n)$ и $f_j(n)$

$$P_j(z) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}(n) z^n, \quad F_j(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_j(n) z^n\,.$$

Умножая (1.3) на z^n и складывая при $n = 1, 2, \ldots$, получаем

$$P_j(z) = z f_j(1)\big(1 + P_j(z)\big) + z^2 f_j(2)\big(1 + P_j(z)\big) + \cdots = F_j(z)\big(1 + P_j(z)\big).$$

(При $x \in (0, 1)$ все слагаемые в (1.3) неотрицательны, поэтому группировать их можем любым образом. По теореме Абеля равенство сохраняется и в единичном круге на комплексной плоскости.) Таким образом, $P_j(z) = F_j(z)\big(1 + P_j(z)\big)$. Отсюда находим

$$P_j(z) = \frac{F_j(z)}{1 - F_j(z)}, \quad F_j(z) = \frac{P_j(z)}{1 + P_j(z)}\,.$$

Пусть $P_j = \infty$. Тогда $P_j(z) \to \infty$ при $z \to 1-0$. Поэтому $F_j(z) \to 1$. Так как $F_j(x) < F_j \leqslant 1, \quad x \in (0, 1)$, получаем $F_j = 1$. Пусть теперь $F_j = 1$. Тогда $F_j(z) \to 1$ при $z \to 1-0$. Отсюда следует, что $P_j(z) \to \infty$, а значит, $P_j = \infty$. Наконец, если $P_j = \sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}(n) < \infty$, то получаем $F_j = \frac{P_j}{1+P_j}$. □

Число $P_j = \sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}(n)$ можно трактовать как среднее число попаданий в состояние j, если начальным состоянием было $j \in E$. В самом деле, число возвращений в состояние j равно $\sum_{n=1}^{\infty} I_{\{\xi_n=j|\xi_0=j\}}$. Поэтому

$$M\Big[\sum_{n=1}^{\infty} I_{\{\xi_n=j|\xi_0=j\}}\Big] = \sum_{n=1}^{\infty} M\big[I_{\{\xi_n=j|\xi_0=j\}}\big] = \sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}(n) = P_j\,.$$

После очередного возвращения в исходное состояние в тот или иной момент времени τ поведение процесса при $t \geqslant \tau$ иакое же, как если бы речь щла о начальном моменте $\tau = 0$. Поэтому верна теорема.

Теорема 1.3. *Если исходное состояние i является возвратным, то система с вероятностью 1 за бесконечное число шагов бесконечное много раз возвратится в состояние i. Если же эта система является невозвратной, то за бесконечное число шагов система с вероятностью 1 лишь конечное число раз побывает в состоянии i, другими словами, после некоторого конечного чисоа шагов она никогда больше не возвратиться в состояние i.*

Говорят, что состояние j достижимо для i, если существует $t > 0$ такое, что $p_{ij}(t) > 0$. Состояния i и j называются сообщающимися, если найдутся t и s такие, что $p_{ij}(t) > 0$ и $p_{ji}(s) > 0$.

Цепь Маркова называется неразложимой, когда каждое ее состояние достижимо из любого другого состояния.

Теорема 1.4 (солидарности). *В неразложимой цепи Маркова все состояния возвратны, если хотя бы одно возвратно.*

Доказательство. Пусть E_k и E_j – два различных состояния. Существуют числа N и M такие, что $p_{kj}(N) > 0$, $p_{jk}(M) > 0$. По формуле полной вероятности

$$p_{kk}(N + M + n) = \sum_{\ell,s} p_{k\ell}(N)p_{\ell s}(n)p_{sk}(M)\,.$$

Отсюда следует, что

$$p_{kk}(N + M + n) \geqslant p_{kj}(N)p_{jj}(n)p_{jk}(M) = \alpha\beta p_{jj}(n),$$

где n – любое, $\alpha = p_{kj}(N) > 0$ и $\beta = p_{jk}(M) > 0$. Точно так же можно показать, что $p_{jj}(N+M+n) \geqslant \alpha\beta p_{kk}(n)$. Отсюда получаем

$$\frac{1}{\alpha\beta} p_{kk}(n + M + N) \geqslant p_{jj}(n) \geqslant \alpha\beta p_{kk}(n - N - M)$$

для $n > N + M$. Поэтому асимптотические свойства последовательностей $p_{kk}(n)$ и $p_{jj}(n)$ одинаковы. В частности, если $P_k = \sum\limits_{n=1}^{\infty} p_{kk}(n) = \infty$, то $\sum\limits_{n=M+N+1}^{\infty} p_{jj}(n) \geqslant \alpha\beta \sum\limits_{n+M+N+1}^{\infty} p_{kk}(n-M-N) = \infty$. Таким образом, если состояние $k \in E$ возвратно, то и состояние $j \in E$ возвратно. $\square$

Теорема о предельных вероятностях может быть усилена. Состояние $j \in E$ называется периодическим с периодом d_j, если возвращение с положительной вероятностью в состояние j возможно только за число шагов, кратное d_j и d_j является общим наибольшим делителем множества чисел $\{n : f_j(n) > 0\}$.

Если состояния неразложимой цепи Маркова – периодические с периодом $d > 1$, то цепь называется периодической. Если общий наибольший делитель множества чисел $\{n : f_j(n) > 0\}$ равен 1 для некоторого j, цепь называется непериодической.

Теорема 1.5. *Пусть число N состояний цепи Маркова конечно. Для того, чтобы при любом j существовал предел $\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = p_j > 0$, $j = 1, \ldots, r$, не зависящий от i, необходимо и достаточно, чтобы цепь была непериодической и неразложимой. При этом предельные вероятности p_j*

являются единственным решением системы

$$\sum_{k=1}^{r} x_k\, p_{kj} = x_j\,, \quad j=1,\ldots,r\,, \quad \sum_{j=1}^{r} x_j = 1\,. \quad eq{:}III.1.4 \tag{1.4}$$

Кроме того, существует такое $h < 1$, *что* $|p_{ij}(t) - p_j| < h^t$.

Для конкретной матрицы переходных вероятностей не всегда легко определить, существует ли стационарное распределение вероятностей $\{p_j\}$. Одним из исключениий является случай, когда

$$p_{jk} = 0 \quad \text{при} \quad |k-j| > 1\,.$$

то есть когда все ненулевые элементы матрицы лежат на главной диагонали или на непосредственно примыкающих и ней прямых. Если состояния пронумерованы, начиная с 0, то система уравнений (1.4) здесь примет вид

$$\begin{aligned} p_0 &= p_{00}p_0 + p_{10}p_1 \\ p_1 &= p_{01}p_0 + p_{11}p_1 + p_{21}p_2 \quad \text{eq:III.1.5} \end{aligned} \tag{1.5}$$

и так далее.

Ограничимся рассмотрением случая $p_{j,j+1} > 0$ и $p_{j,j-1} > 0$ при всех $j > 0$; относительно диагональных элементов не предполагается ничего.

Уравнения (1.5) могут быть последовательно разрешены относительно $p_1, p_2, \ldots$. Вспоминая, что для каждой строки матрицы $[P]$ сумма элементов равна единице, последовательно находим

$$p_1 = \frac{p_{01}}{p_{10}}p_0, \quad p_2 = \frac{p_{01}p_{12}}{p_{10}p_{21}}p_0, \quad p_3 = \frac{p_{01}p_{12}p_{23}}{p_{10}p_{21}p_{32}}p_0$$

и так далее. Получаемая в результате последовательность $p_0, p_1, p_2, \ldots$ с точностью до множителя является единственным решением системы (1.4).Чтобы превратить ее в распределение вероятностей, надо выбрать нормирующий множитель p_0 , так чтобы $\sum_k p_k = 1$. Если число состояний цепи Маркова конечно, то в качестве p_0 следует взять

$$\sum_k \frac{p_{01}p_{12}p_{23}\cdots p_{k-1,k}}{p_{10}p_{21}p_{32}\cdots p_{k,k-1}}\,.$$

Пример 2. Модель Бернулли – Лапласа для диффузии. Имеем 2ρчастиц, среди которых ρ черных и ρ белых в двух сосудах. Будем говорить, что система находится в состоянии E_k, если первый сосуд содержит k белых частиц, тогда как во втором сосуде содержится $\rho - k$ белых частиц. При каждом испытании из сосудов выбирается случайным образом по одной частице и эти две частицы меняются местами. Переходные вероятности даются формулами

$$p_{j,j-1} = \left(\frac{j}{\rho}\right)^2, \quad p_{j,j+1} = \left(\frac{\rho-j}{\rho}\right)^2, \quad p_{j,j+} = 2\frac{j(\rho-j)}{\rho^2} \quad \text{eq:III.1.6} \tag{1.6}$$

и $p_{jk} = 0$, если $|j-k| > 1$.

Для матрицы с элементами (1.6) по индукции убеждаемся, что

$$p_k = \left(C_\rho^k\right)^2 p_0, \quad k = 1, 2, \ldots\,.$$

Так как члены гипергеометрического распределения должны в сумме давать 1,

$$\sum_k^{\rho} \left(C_\rho^k\right)^2 = \sum_k^{\rho} C_\rho^k C_\rho^{\rho-k} = C_{2\rho}^{\rho}\,.$$

то,

$$p_k = \left(C_\rho^k\right)^2 \left(C_{2\rho}^{\rho}\right)^{-1}.$$

О случайных блужданиях по решетке

Представим частицу, которая движется по целым точкам на прямой. Перемещение из одной точки в другую происходит через равные промежутки времени. За один шаг частица из точки k с положительной вероятностью p перемещается в точку $k+1$ и с положительной вероятностью $q = 1 - p$ перемещается в точку $k-1$. Физической системе соответствует цепь Маркова

$$\xi_n = \xi_{n-1} + \eta_n = \xi_0 + S_n, \quad \eta_n = \begin{cases} 1 & \text{с вероятностью } p \\ -1 & \text{с вероятностью } 1-p\,. \end{cases}$$

Заметим, что вернуться в какую-либо точку можно только за четное число шагов.

Теорема 1.6. *Случайное блуждание на прямой образует возвратную цепь Маркова тогда и только тогда, когда $p = q = 1/2$.*

Доказательство. При $0 < p < 1$ блуждание является неразложимой цепью Маркова. По теореме солидарности достаточно изучить тип одной точки.

С этой целью исследуем сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}(n)$. Ясно, что $p_{00}(2k+1) = 0$. Так как сумма S_n есть координата блуждающей частицы после n шагов, то $p_{00}(2k) = P\{S_{2k} = 0\}$. В сумме S_{2k} k случайных величин равны 1, а оставшиеся k равны -1. Поэтому

$$P\{S_{2k} = 0\} = C_{2k}^k p^k (1-p)^k \sim \frac{1}{\sqrt{4\pi kpq}} \exp\Big\{-\frac{(k-2kp)^2}{4kpq}\Big\} = \frac{1}{2\sqrt{pq}} \frac{1}{\sqrt{\pi k}} \exp\Big\{-\frac{(1-2p)^2}{4pq} k\Big\}$$

Поэтому при $p \neq 1/2$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_{00}(2k)$ сходится, а при $p = 1/2$ имеем

$$p_{00}(2k) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi k}}$$

и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_{00}(2k)$ расходится. □

Замечание. При $p \neq 1/2$ среднее число возвращений в нуль конечно, оно равно $\sum_{k=1}^{\infty} p_{00}(2k)$. Это значит, что с некоторого шага частица никогда больше не вернется в нуль. Частицу снесет вправо, если $p > 1/2$ или влево, если $p < 1/2$.

При $p = 1/2$ среднее число возвращений в нуль бесконечно, оно растет, но не пропорционально числу шагов

$$p_{00}(2k) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi k}} \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{n} p_{00}(2k) \sim \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\pi k}} \sim \frac{2\sqrt{n}}{\pi}\,.$$

Таким образом, в безобидной игре доля ничьих результатов с увеличением числа шагов быстро падает, а отклонение ξ_n по величине и длительности возрастают.

В двумерном случайном блуждании частица перемещается единичными шагами в четырех направлениях параллельно осям x и y. Для частицы, выходящей из начала координат, возможными положениями будут только точки с целочисленными координатами.

Теорема 1.7. *Симметричное случайное блуждание возвратно в пространстве двух измерений и невозвратно в пространстве трех измерений.*

Доказательство. Возвращение в начальное положение возможно только тогда, когда количество шагов в положительных направлениях осей x и y равны соответственно количествам шагов в отрицательных направлениях этих осей. Поэтому $p_{00}(n) = 0$, если n нечетно, и (воспользуемся здесь полиномиальным распределением)

$$p_{00}(2n) = \frac{1}{4^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{k!k!(n-k)!(n-k)!} = \frac{1}{4^{2n}} C_{2n}^n \sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2.$$

Члены гипергеометрического распределения в сумме должны давать единицу. Поэтому

$$C_a^0 C_b^n + C_a^1 C_b^{n-1} + \dots + C_a^n C_b^0 = C_{a+b}^n \,. \tag{1.7}$$

Так как $C_n^k = C_n^{n-k}$, из (1.7) следует, что

$$\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \dots + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n \,.$$

В результате, получаем

$$p_{00}(2n) = 4^{-2n}\left(C_{2n}^n\right)^2 .$$

С помощью формулы Стирлинга находим, что $p_{00}(2n)$ является величиной порядка $1/n$, таким образом ряд $\sum_{k=1}^n p_{00}(2n)$ расходится.

В трехмерном случае аналогично имеем

$$p_{00}(2n) = 6^{-2n} \sum_{\substack{j,k\geqslant 0\\ j+k\leqslant n}} \frac{(2n)!}{j!j!k!k!(n-j-k)!(n-j-k)!} = \frac{1}{2^{2n}} C_{2n}^n \sum_{\substack{j,k\geqslant 0\\ j+k\leqslant n}} \left\{\frac{1}{3^n}\frac{n!}{j!k!(n-j-k)!}\right\}^2 .$$

Внутри скобок стоят члены триномиального распределения и их сумма равна 1. Поэтому сумма их квадратов не превосходит максимального из членов в скобках. В самом деле, если $\sum_{k=1}^n a_k = 1$, то

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 \leqslant \max_k a_k \sum_{k=1}^n a_k = \max_k a_k \,.$$

Этому члену соответствуют значения j и k, равные примерно $n/3$. С помощью формулы Стирлинга несложно убедиться, что этот максимум сравним с $1/n$. Поэтому вероятность $p_{00}(2n)$ сравнима с величиной $1/\sqrt{n^3}$, так что ряд $\sum_{k=1}^n p_{00}(2n)$ сходится. □

Случайное блуждание по целым точкам отреза $[0, n]$

Обсудим блуждание на примере задачи о разорении. Пусть начальный капитал ξ_0 первого игрока составляет k рублей, а капитал второго игрока – $(n-k)$ рублей. Первый игрок выигрывает или проигрывает рубль с вероятностями p и q соответственно. Игра продолжается до тех пор, пока капитал первого игрока не уменьшится до нуля, либо не возрастет до n. Поглощение точки в правом конце отрезка $[0, n]$ соответствует выигрышу первого игрока.

Рассмотрим конечную цепь Маркова

$$\begin{gathered}\xi_{t+1} = \xi_t + \eta_t, \quad P\{\eta_t = 1 | \xi_t \neq 0 \vee \xi_t \neq n\} = p, \quad P\{\eta_t = -1 | \xi_t \neq 0 \vee \xi_t \neq n\} = q \\ \text{и} \quad P\{\eta = 0 | \xi_t = 0 \vee \xi_t = n\} = 1 \,.\end{gathered}$$

Вероятность выигрыша для первого игрока в момент времени t есть $p_{kn}(t) = P\{\xi_t = n | \xi_0 = k\}$.

По формуле полной вероятности

$$\begin{aligned} P\{\xi_{t+1} = n\} &= \\ &= P\{\xi_1 = k+1 | \xi_0 = k\} P\{\xi_{t+1} = n | \xi_1 = k+1\} + \\ &\qquad + P\{\xi_1 = k-1 | \xi_0 = k\} P\{\xi_{t+1} = n | \xi_1 = k-1\} \end{aligned} \tag{1.8}$$

или

$$p_{kn}(t+1) = p\, p_{k+1,n}(t) + q\, p_{k-1,n}(t) \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \,.$$

Теорему о предельных вероятностях применить не можем, но заметим, что

$$\{\xi_1 = n\} \subset \{\xi_2 = n\} \subset \dots \subset \{\xi_t = n\} \subset \dots$$

Положим $A = \bigcup_{t=1}^{\infty} \{\xi_t = n\}$. Тогда

$$p_{kn} = P(A) = \lim_{t\to\infty} P\{\xi_t = n | \xi_0 = k\} = \lim_{t\to\infty} p_{kn}(t).$$

Переходя к пределу в (1.8) при $t \to \infty$, получим

$$p_{kn} = p\, p_{k+1,n} + q\, p_{k-1,n}$$

Так как p_{kn} вероятность выигрыша для первого игрока, то $p_{0n} = 0, \quad p_{nn} = 1$. Рассматриваемая как функция от k, вероятность p_{kn} является решением уравнения в конечных разностях

$$p\, f_{k+1} - f_k + q\, f_{k-1} = 0 \tag{1.9}$$

удовлетворяющим граничным условиям $f_0 = 0 \quad f_n = 1$. Теория решения таких уравнений аналогична теории линейных уравнений с постоянными коэффициентами.

Пусть сначала $p \neq q$. Решение будем искать в виде $f_k = \lambda^k$, где λ является корнем характеристического уравнения $p\lambda^2 - \lambda + q = 0$. Корнями такого уравнения являются $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = q/p$. Значит, функции λ_1^k и λ_2^k удовлетворяют уравнению (1.9). Линейная комбинация

$$f_k = C_1\lambda_1^k + C_2\lambda_2^k \tag{1.10}$$

при любых C_1 и C_2 также является решением. Подставляя граничные условия в (1.10), при $k = 0$ и $k = n$ получим

$$C_1 + C_2 = 0, \quad C_1 + (q/p)^n C_2 = 1.$$

Отсюда и из (1.10) находим

$$p_{kn} = (1 - q/p)^k)/(1 - (q/p)^n).$$

Вероятности выигрыша первым игроком p_{k0} тоже удовлетворяют уравнению (1.9). Но граничными условиями станут $f_0 = 1, \quad f_n = 0$. Определяя из этих условий C_1 и C_2, получим

$$p_{k0} = ((q/p)^k - (q/p)^n)/(1 - (q/p)^n)\,.$$

Так как $p_{k0} + p_{kn} = 1$, то с вероятностью 1 один из игроков выиграет.

Пусть теперь $p = q = 1/2$. В этом случае $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ и решение уравнения (1.9) нужно искать в виде

$$f_k = C_1 + kC_2\,.$$

С помощью граничных условий находим

$$p_{kn} = \frac{k}{n}, \quad p_{k0} = 1 - \frac{k}{n}\,.$$

В схеме блуждания по целым точкам с поглощением только в нуле вероятность события

$$A_n = \{\xi_t = 0 \quad \text{в некоторый момент времени } \ t, \quad \xi_t \in [0, n) \quad \text{во все моменты } \ t\}$$

равна

$$p_{k0} = \begin{cases} ((q/p)^k - (q/p)^n)/(1 - (q/p)^n), & \text{если } \ p \neq q \\ 1 - k/n, & \text{если } \ p = 1/2\,. \end{cases}$$

События A_n вложены последовательно друг в друга

$$A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots\,,$$

поэтому вероятность поглощения в нуле равна

$$p_k = \lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty} p_{k0} = \begin{cases} (q/p)^k, & \text{если} \quad q < p\,, \\ 1, & \text{если} \quad q \geqslant p\,. \end{cases}$$

1.2. Случайные функции

Определение 45. Случайной функцией называется семейство случайных величин ξ_t, зависящее от параметра t из множества T и определенное на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{U}, \mathcal{P})$. Напомним, что при каждом t функция $\xi_t(\omega)$ измерима по ω. При фиксированном ω отображение $t \to \xi_t(\omega)$ называется выборочной функцией. При фиксированном значении t значение случайной величины $\xi_t(\omega)$ называется выборочным значением.

Если $T \subset \mathbf{R}$ и интерпретируется как время, то говорят о случайном процессе. В этом случае значение, принимаемое ξ_t в момент времени t называют состоянием процесса, выборочные функции называют траекториями процесса. Два случайных процесса стохастически эквивалентны, если они совпадают почти наверное при любом фиксированном t, то есть $P\{\xi_t \neq \eta_t\} = 0$.

Пусть $t_1, \dots, t_n \in T$ и $(\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n})$ – случайный вектор. Его распределение будем обозначать через $F_{t_1,\dots,t_n}(x_1, \dots, x_n)$ и называть конечномерным распределением случайной функции ξ_t.

Говорят, что случайный процесс задан, если указано правило для определения конечномерных распределений случайной функции для любого конечного набора моментов наблюдения $t_1, \dots, t_n$. Опишем три способа задания случайной функции:

1. Указать явно правило для построения конечномерных распределений;

2. Задается функция, зависящая от времени и содержащая один или несколько параметров. В качестве параметров берутся случайные величины с известной плотностью распределения. Например, пусть $g(t) = r\sin(2\pi t + \theta), \quad t \in [0, 2\pi]$ и пусть r, θ случайные величины на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{U}, \mathcal{P})$ с совместной плотностью распределения $F_{r,\theta}(u, v)$. Тогда $\xi_t(\omega) = t(\omega)\sin(2\pi t + \theta(\omega)), \quad \omega \in \Omega$ – выборочная функция случайного процесса ξ_t.

3. Конечномерные распределения порождаются применением некоторой операции к траекториям уже заданного случайного процесса.

   Пример 3. Случайный процесс η_t может быть получен как результат прохождения выборочной функции известного процесса ξ_t через линейный фильтр с импульсным откликом $h(t)$. Выборочные функции этих процессов связаны интегралом сверки

$$\eta_t(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(t-u)\xi_u(\omega)du, \quad u \in \Omega.$$

   В дальнейшем линейный фильтр будет рассмотрен более подробно.

Конечномерные распределения удовлетворяют условиям согласования:

1. Если $i_1, \dots, i_n$ – перестановка чисел $1, \dots, n$ и $t_1, \dots, t_n$ – произвольные моменты наблюдений, тогда

$$F_{t_{i_1},\dots,t_{i_n}}(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) = F_{t_1,\dots,t_n}(x_1, \dots, x_n);$$

2. Для любых $t_1, \dots, t_n, t_{n+1}$ из T

$$F_{t_1,\dots,t_n,t_{n+1}}(x_1, \dots, x_n, +\infty) = F_{t_1,\dots,t_n}(x_1, \dots, x_n)\,.$$

Теорема А.Н.Колмогорова утверждает

Теорема 1.1. *Пусть любому конечному набору не совпадающих друг с другом элементов $t_1, \dots t_n \in T$ поставлена в соответствие функция распределения $F_{t_1,\dots,t_n}(x_1, \dots, x_n)$ на $\mathbf{R}^n$. Для того, чтобы эти функции составляли систему конечномерных распределений какой-нибудь случайной функции, необходимо и достаточно, чтобы семейство $\{F_{t_1,\dots,t_n}(x_1 \dots, x_n),\ t_1, \dots, t_n \in T,\ n = 1, 2, \dots\}$ было согласованным.*

Стационарным процессом называется случайный процесс, конечномерные распределения которого не зависят от начала отсчета времени

$$F_{t_1+t,t_2+t,\dots,t_n+t}(x_1,x_2,\dots,x_n)=F_{t_1,t_2,\dots,t_n}(x_1,x_2,\dots,x_n)\,.$$

Для дискретных процессов (множество состояний которого не более чем счетно) стационарность означает

$$P\{\xi_{t_1+t}=x_1,\dots,\xi_{t_n+t}=x_n\}=P\{\xi_{t_1}=x_1,\dots,\xi_{t_n}=x_n\}.$$

Для абсолютно непрерывного случайного процесса стационарность означает, что

$$p_{t_1+t,\dots,t_n+t}(u_1,\dots,u_n)=p_{t_1,\dots,t_n}(u_1,\dots,u_n)\,.$$

Отметим, что моменты стационарных процессом инвариантны по времени. Для примера

$$M(\xi_{t_1})^n=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^n p_{t_1}(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^n p_{t_2}(x)dx=M(\xi_{t_2})^n$$

Если g – функция n переменных $x_1,\dots,x_n$ и $g_{t_1,\dots,t_n}=g(\xi_{t_1},\dots,\xi_{t_n})$ – случайная величина, порожденная стационарным случайным процессом ξ_t, то

$$\begin{aligned}Mg_{t_1,\dots,t_n}&=\int\limits_{\mathbf{R^n}}g(u_1,\dots,u_n)p_{t_1,\dots,t_n}(u_1,\dots,u_n)du=\\&=\int\limits_{\mathbf{R^n}}g(u_1,\dots,u_n)p_{t_1+t,\dots,t_n+t}(u_1,\dots,u_n)du=Mg_{t_1+t,\dots,t_n+t}\,.\end{aligned}$$

Пример 4. Пусть $g(t)$ – произвольная периодическая функция с периодом T. Определим случайный процесс ξ_t, положив $\xi_t=g(t+\tau)$, где τ – случайная величина, равномерно распределенная на интервале длиной T. Тогда ξ_t – стационарный случайный процесс.

Случайный процесс ξ_t с непрерывным временем $t\in[0,\infty)$ называется процессом с независимыми приращениями, если для любых $t_1,\dots,t_n$, $0\leqslant t_1<\dots<t_n<+\infty$ случайные величины

$$\xi_{t_1},\xi_{t_2}-\xi_{t_1},\dots,\xi_{t_n}-\xi_{t_{n-1}}$$

независимы.

Пуасоновский процесс

Пуассоновским процессом называется процесс ξ_t со счетным числом состояний $\{0,1,2,3,\dots\}$, удовлетворяющий условиям

1°. ξ_t – процесс с независимыми приращениями;

2°. при любых $t_1<t_2$ и s приращения $\xi_{t_2}-\xi_{t_1}$ и $\xi_{t_2+s}-\xi_{t_1+s}$ одинаково распределены (однородность по времени);

3°. $\xi_0(\omega)=0,\ \omega\in\Omega$;

4°. при $h\to 0$

$$\begin{aligned}&P\{\xi_h=0\}=1-\lambda h+o(h),\quad P\{\xi_h\geqslant 2\}=o(h),\\&P\{\xi_h=1\}=\lambda h+o(h),\quad 0<\lambda<\infty\,,\end{aligned}$$

то есть вероятность скачка внутри короткого интервала времени продолжительностью h равна $\lambda h+o(h)$, а вероятность наличия более одного скачка равна $o(h)$.

Теорема 1.2. *Если ξ_t – пуассоновский процесс, то*

$$P\{\xi_t = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}\,.$$

Доказательство. Пусть $\varphi_t(x) = Mx^{\xi_t}$ – производящая функция случайной величины ξ_t. Так как $\xi_{t+h} - \xi_t$ и ξ_t – независимые случайные величины, то

$$\varphi_{t+h}(x) = Mx^{\xi_{t+h}-\xi_t} Mx^{\xi_t} = Mx^{\xi_h} Mx^{\xi_t}.$$

По определению пуасоновского процесса

$$Mx^{\xi_h}(x) = 1 - \lambda h + x\lambda h + o(h), \quad |x| \leqslant 1\,.$$

Поэтому

$$\varphi_{t+h}(x) = \varphi_t(x)(1 - \lambda h + x\lambda h + o(h))\,.$$

Отсюда следует

$$\frac{\varphi_{t+h}(x) - \varphi_t(x)}{h} = \lambda(x-1)\varphi_t(x) + o(1) \quad \text{при} \quad h \to 0\,.$$

В пределе получаем

$$\frac{d\varphi_t(x)}{dt} = \lambda(x-1)\varphi_t(x)\,.$$

Решением уравнения является функция

$$e^{\lambda t(x-1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} x^k\,.$$

□

Замечание. Пуассоновский процесс задается на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{U}, P)$, где Ω совпадает с множеством ступенчатых функций, у которых имеются только единичные скачки, и моменты времени, соответствующие скачкам, не имеют точек накопления.

Согласно теореме состояние процесса $\xi_t = \xi_t - \xi_0$ при любом фиксированном t равно числу скачков траектории процесса ξ_s на отрезке $[0, t]$.

С помощью доказанной теоремы можно найти совместное распределение случайных величин $\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_n}$ для любых $0 \leqslant t_1 < \cdots < t_n$. Ясно, что

$$\{\xi_{t_1} = k_1, \xi_{t_2} = k_2, \ldots, \xi_{t_n} = k_n\} = \{\xi_{t_1} = k_1, \xi_{t_2} - \xi_{t_1} = k_2 - k_1, \ldots, \xi_{t_n} - \xi_{t_{n-1}} = k_n - k_{n-1}\}\,.$$

Из независимости и однородности приращений следует

$$P\{\xi_{t_1} = k_1, \xi_{t_2} = k_2, \ldots, \xi_{t_n} = k_n\} = \frac{(\lambda t_1)^{k_1}}{(k_1)!} e^{-\lambda t_1} \frac{\lambda(t_2 - t_1)^{(k_2-k_1)}}{(k_2-k_1)!} e^{-\lambda(t_2-t_1)} \ldots$$
$$\ldots \frac{\lambda(t_n - t_{n-1})^{(k_n-k_{n-1})}}{(k_2-k_1)!} e^{-\lambda(t_n-t_{n-1})}\,.$$

Замечание. Пуассоновский процесс обладает свойством марковости.

Достаточно воспользоваться определением условной вероятности чтобы доказать свойство марковости пуассоновского процесса.

Сформулируем здесь теорему, которая потребуется в дальнейшем.

Теорема 1.3. *Пусть* $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_r$ *– случайный абсолютно непрерывный вектор с непрерывной плотностью распределения* $p_\xi(x)$, $x = (x_1, \dots, x_r)$ *и* $g(x) = (g_1(x), \dots, g_r(x))$. *Если отображение* $y = g(x)$ *взаимно однозначно, непрерывно дифференцируемо и якобиан*

$$J(x) = \frac{\partial(g_1, \dots, g_r)}{\partial(x_1, \dots, x_r)} \neq 0\,,$$

то распределение вектора $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_r) = g(\xi_1, \dots, \xi_r)$ *абсолютно непрерывно и*

$$p_\eta(x) = p_\xi(g^{-1}(x))|J(g^{-1}(x))|^{-1}.$$

Пусть $\theta_k,\ k = 0, 1, \dots$ – момент k-го скачка траектории и $\tau_k = \theta_k - \theta_{k-1}$ – промежуток времени между двумя последовательными скачками.

Теорема 1.4. *При любом* n *случайные величины* $\tau_1, \dots, \tau_n$ *независимы и каждая из них имеет показательное распределение с параметром* λ.

Доказательство. Убедимся, что случайные величины τ_k имеют показательное распределение с параметром λ. Ясно, что

$$\mathbf{P}\{\tau_1 > t\} = \mathbf{P}\{\xi_t - \xi_0 = 0\} = \mathbf{P}\{\xi_t = 0\} = e^{-\lambda t}\,.$$

Для $k > 1$ имеем

$$\mathbf{P}\{\tau_k > t\} = \mathbf{P}\{\xi_{t+\theta_{k-1}} - \xi_{\theta_{k-1}} = 0\} = \mathbf{P}\{\xi_t = 0\} = e^{-\lambda t}\,.$$

Пусть $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ и промежутки $\Delta_k = (t_k, t_k + h_k]$, $h_k > 0$, $k = 1, \dots, n$, не пересекаются. Положим $h_0 = 0$. Так как

$$\{\theta_1 \in \Delta_1, \theta_2 \in \Delta_2, \dots, \theta_n \in \Delta_n\} = \bigcap_{k=1}^{n} \{(\xi_{t_k} - \xi_{t_{k-1}+h_{k-1}} = 0) \bigcap (\xi_{t_k+h_k} - \xi_{t_k} = 1)\}\,,$$

по теореме 1.2

$$\mathbf{P}\{\bigcap_{k=1}^{n} (\theta_k \in \Delta_k)\} = \prod_{k=1}^{n} (e^{-\lambda(t_k - t_{k-1} - h_{k-1})} \lambda h_k e^{-\lambda h_k}) = e^{-\lambda t_n} \lambda^n e^{-\lambda h_n} h_1 \dots h_n\,.$$

С другой стороны

$$\mathbf{P}\{\bigcap_{k=1}^{n} (\theta_k \in \Delta_k)\} = \int \cdots \int_{\Delta} p_{\theta_1 \dots \theta_n}(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n\,,$$

где $\Delta = \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_n$. Отсюда следует, что $p_{\theta_1 \dots \theta_n}(t_1, \dots, t_n) = e^{-\lambda t_n} \lambda^n$, если $0 < t_1 < \cdots < t_n$.

Положим $s_k = g_k(u_1 \dots u_n) = u_k - u_{k-1}$, $k = 2, \dots, n$ и $s_1 = u_1$. Пусть

$$(\tau_1, \dots, \tau_n) = (g_1(\theta_1, \dots, \theta_n), \dots, g_n(\theta_1, \dots, \theta_n))\,.$$

Отображение $g(u) = (g_1(u), \dots, g_n(u))$, $u = (u_1, \dots, u_n)$ взаимно однозначно и якобиан отображения равен 1. Учитывая, что $u_n = s_1 + \cdots + s_n$, из предыдущей теоремы получаем

$$p_{\tau_1, \dots, \tau_n}(s_1, \dots, s_n) = p_{\theta_1, \dots \theta_n}(u_1, \dots, u_n) = \lambda^n e^{-\lambda(s_1 + \cdots + s_n)} = \prod_{k=1}^{n} p_{\tau_k}(s_k)\,,$$

где $p_{\tau_k}(s_k) = \lambda e^{-\lambda s_k}$ – плотность показательного распределения с параметром λ. Таким образом, показательно распределенные случайные величины $\tau_1, \dots, \tau_n$ независимы. $\square$

Пример 5. Пусть $x_1, \ldots$ — взаимно независимые случайные величины с одинаковым показательным распределением $F(x) = 1 - \exp\{-\alpha x\}$, $x > 0$. Положим $s_0 = 0$, $\quad s_n = x_1 + \ldots, x_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Случайная величина s_n имеет плотность $g_n(x)$, равную

$$g_n(x) = \alpha \frac{(\alpha x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha x}$$

и функцию распределения

$$G_n(x) = 1 - e^{-\alpha x}\Big(1 + \frac{\alpha x}{1!} + \cdots + \frac{(\alpha x)^{n-1}}{(n-1)!}\Big), \quad x > 0\,.$$

Введем случайную величину ξ_t следующим образом: ξ_t равно числу индексов $k \geqslant 1$ таких, что $s_k \leqslant t$. Событие $\{\xi_t = n\}$ происходит тогда и только тогда, когда $s_n \leqslant t$, а $s_{n+1} > t$. Поэтому вероятность события $\xi_t = n$ равна $\mathbf{P}\{s_n \leqslant t \,|\, s_{n+1} \leqslant t\} = G(n) - G(n+1)$ или

$$\mathbf{P}\{\xi_t = n\} = e^{-\alpha t}\frac{(\alpha t)^n}{n!}\,,$$

то есть ξ_t имеет пуассоновское распределение с математическим ожиданием αt.

Если x_k — время ожидания между последовательными поступлениями вызовов, то s_n — момент n–го поступления вызова, а ξ_t — число поступлений вызовов за время t. Пусть математическое ожидание $M\xi_t$ раняется λt. Тогда параметр $\lambda = M\xi_t/t$ является средним числом вызовов за единицу времени.

Пуассоновские процессы с большой точностью описывают многочисленные явления в естествознании и процессы в технике. Вот несколько примеров:

1. Число спонтанно распавшихся атомов радиоактивного вещества за тот или иной промежуток времени (когда этого вещества не слишком мало и неслишком много).

2. Число космических частиц, попавших на определенную площадку за промежуток времени t.

3. Число отказов за промежуток времени t сложной радиотехнической системой, состоящей из большого числа элементов, каждый из которых лишь с малой вероятностью может отказать в работе за единицу времени, независимо от состояния других элементов.

4. Число поступивших вызовов на телефонную станцию за время t.

Параметром пуассоновского распределения не обязательно является время. Пусть в жидкости взвешены мельчайшие частицы какого-либо вещества. Под влиянием ударов окружающих молекул эти частицы находятся в непрерывном хаотическом движении (броуновском движении). В результате, в каждый момент времени мы имеем случайное распределение частиц в пространстве. Многочисленные эксперименты подсказывают, что распределение частиц, попавших в некоторую определенную область подчиняется закону Пуассона. Если $p_k(v)$ — вероятность k частицам оказаться в области v, то

$$p_k(v) = \frac{(av)^k}{k!} e^{-av}$$

Пуассоновский процесс еще называют простейшим процессом.

Процесс гибели и размножения

Марковский процесс ξ_t называется процессом гибели и размножения, если при $h \to 0$ выполняются условия

1. $P\{\xi_{t+h} = k+1 | \xi_t = k\} = \lambda_k h + o(h)$;
2. $P\{\xi_{t+h} = k-1 | \xi_t = k\} = \mu_k h + o(h)$;
3. $P\{\xi_{t+h} = k | \xi_t = k\} = 1 - (\lambda_k + \mu_k)h + o(h)$,

где $\lambda_k,\ \mu_k \geqslant 0$ при $k > 0$, и $\mu_k = 0$ при $k \leqslant 0$.

Через $P_k(t)$ обозначим вероятность того, что в момент t процесс находится в состоянии k. Тогда по формуле полной вероятности

$$P_k(t+h) = P_k(t)(1 - (\lambda_k + \mu_k)h) + P_{k-1}(t)\lambda_{k-1}h + P_{k+1}(t)\mu_{k+1}h + o(h)\,.$$

Устремляя h к нулю, в пределе получим

$$P_k'(t) = -(\lambda_k + \mu_k)P_k(t) + \lambda_{k-1}P_{k-1}(t) + \mu_{k+1}P_{k+1}(t)$$

и

$$P_0'(t) = -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t)\,.$$

Если задано начальное распределение $\{P_k(0)\}_{k=1}^{\infty}$, $\sum_{k=1}^{\infty} P_k(0) = 1$, то система дифференциальных уравнений имеет единственное решение, если коэффициенты λ_k и μ_k ограничены или возрастают достаточно медленно. В этом случае решение $\{P_k(t\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию регулярности $\sum_{k=1}^{\infty} P_k(t) = 1$. Однако можно выбрать коэффициенты таким образом, что $\sum_{k=1}^{\infty} P_k(t) < 1$ и будет существовать бесконечное множество решений. На сумму $\sum_{k=1}^{\infty} P_k(t)$ можно смотреть как на вероятность того, что за время t произойдет лишь конечное число изменений состояний системы. Вероятность $1 - \sum_{k=1}^{\infty} P_k(t)$ в таком случае интерпретируется как вероятность бесконечного числа изменений состояния системы за время t. В условиях радиоактивного распада такая возможность означает лавинный распад.

Процесс чистого размножения

Пусть $\mu_k = 0$ и $\lambda_k > 0$. Система дифференциальных уравнений в этом случае примет вид

$$\begin{aligned} &P_0'(t) = \lambda_0 P_0(t) \\ &P_k'(t) = -\lambda_k P_k(t) + \lambda_{k-1}P_{k-1}(t), \quad k \geqslant 1\,. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Последовательно интегрируя, находим все $P_k(t)$.

Теорема 1.8 (Феллер). *Для того, чтобы при всех t решения $P_k(t)$ уравнения чистого размножения удовлетворяли условию регулярности $\sum_{k=1}^{\infty} P_k(t) = 1$ необходимо и достаточно, чтобы ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1}$$

расходился.

Доказательство. Пусть $S_n(t) = P_0(t) + \ldots P_n(t)$. Складывая первые n уравнений в (1.11), получаем

$$S_n'(t) = -\lambda_n P_n(t).$$

Поэтому

$$S_n(0) - S_n(t) = \lambda_n \int\limits_0^t P_n(t)dt.$$

Так как $S_n(0) \nearrow 1$ и $S_n(t) \nearrow$ при $n \to \infty$, существует предел

$$\lim_{n\to\infty}[S_n(0) - S_n(t)] = \mu(t) \geqslant 0\,.$$

А значит, для положительного ε при фиксированном t, начиная с некоторого n_0, выполняется неравенство

$$\lambda_n \int_0^t P_n(t)dt \geqslant \mu(t) - \varepsilon.$$

Поэтому для достаточно больших n имеем

$$t \geqslant \int_0^t S_n(z)dz \geqslant (\mu(t) - \varepsilon)\Big(\frac{1}{\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_1} + \cdots + \frac{1}{\lambda_n}\Big)\,.$$

Из этого неравенства следует, что если ряд расходится, то $\mu(t) - \varepsilon \leqslant 0$ Так как положительное ε произвольно, то $\mu(t) \leqslant 0$. Поэтому $\mu(t) = 0$, а значит, $S_n(t) \nearrow 1$.

С другой стороны, ясно, что $\lambda_n \int_0^t P_n(t)dt \leqslant 1$. Поэтому

$$\int_0^t S_n(t)dt \leqslant \Big(\frac{1}{\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_1} + \cdots + \frac{1}{\lambda_n}\Big)\,.$$

В пределе при $n \to \infty$ получаем

$$\int_0^t [1 - \mu(t)]dt \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}\,.$$

Если $\mu(t) = 0$, то есть $\lim_{n\to\infty} S_n(t) = 1$, то ряд справа расходится. □

Система массового обслуживания с потерями

Пусть требования, поступающие на n обслуживающих устройств образуют пуассоновский процесс с параметром λ, а время обслуживания любого требования любым устройством имеет показательное распределение с параметром μ и не зависит от работы других обслуживающих устройств. Если все обслуживающие устройства заняты, то требование теряется. Число требований в системе ξ_t в момент t может принимать значения $1, \ldots, n$.

Нетрудно понять, что вероятность перехода из состояния k в состояние k за время $h \to 0$ отличается на $o(h)$ от вероятности произведения событий

{за время h не закончится обслуживание ни одного из k требований}

и

{за время h не поступит новых требований}.

Так как устройства обслуживаются независимо, то

$$P\{\xi_{t+h} = k \,|\, \xi_t = k\} = (1 - \mu h + o(h))^k(1 - \lambda h + o(h)) + o(h),$$

то есть

$$P\{\xi_{t+h} = k \,|\, \xi_t = k\} = 1 - (k\mu + \lambda)h + o(h)\,.$$

Вероятность перехода из состояния k в состояние $k+1$ за время $h \to 0$ отличается на $o(h)$ от вероятности произведения событий

{за время h не закончится обслуживание ни одного из k требований}

и

{за время h поступит одно новое требование}.

В этом случае

$$P\{\xi_{t+h} = k + 1 \,|\, \xi_t = k\} = \lambda h + o(h) \quad k < n\,.$$

Вероятность перехода из состояния k в состояние $k-1$ за время $h \to 0$ отличается на $o(h)$ от вероятности закончить обслуживание хотя бы одного требования.

$$P\{\xi_{t+h} = k-1 \,|\, \xi_t = k\} = k\mu h + o(h)\,, \quad 0 < k < n\,.$$

Случаи $k = 0$ и $k = n$ рассматриваются отдельно.

Система массового обслуживания с потерями вписывается в процесс гибели и размножения с параметрами $\lambda_k = \lambda$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$, $\lambda_k = 0$ $(k \geqslant n)$, $\mu_k = k\mu$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$, $\mu_k = 0$ $(k > n,\ k = 0)$.

В пределе при $h \to 0$ приходим к системе линейных уравнений для нахождения вероятности $P_k(t)$ процессу находиться в состоянии k в момент времени t.

$$\begin{aligned}
&P_0'(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t)\\
&P_k'(t) = -(\lambda + k\mu)P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t) + (k+1)\mu P_{k+1}(t)\,, \quad 0 < k < n\,,\\
&P_n'(t) = -(\lambda + n\mu)P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t)\,,\\
&\sum_{k=1}^{n} P_k(t) = 1\,.
\end{aligned}$$

Для установившегося процесса введем предельные вероятности $p_k = \lim_{t\to\infty} P_k(t)$, которые находятся из системы уравнений

$$\begin{aligned}
&\lambda p_0 + \mu p_1 = 0\,,\\
&\lambda p_{k-1} - (\lambda + k\mu)p_k + (k+1)\mu p_{k+1} = 0, \quad 1 \leqslant k < n\,,\\
&\lambda p_{n-1} - n\mu p_n = 0\\
&\sum_{k=0}^{n} p_k = 1\,.
\end{aligned}$$

Обозначим через $z_k = \lambda p_{k-1} - k\mu p_k$, удовлетворяющие системе

$$\begin{aligned}
&z_0 = 0\,,\\
&z_k - z_{k-1} = 0\,, \quad 1 \leqslant k < n\,,\\
&z_n = 0\,.
\end{aligned}$$

Отсюда находим

$$k\mu p_k = \lambda p_{k-1}, \ \ k = 1, \ldots, n.$$

Поэтому

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0\,, \quad k \geqslant 1, \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}\,.$$

Так как

$$p_0 \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} \Big) = 1\,,$$

находим

$$p_0 = \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{\rho^k}{k!} \Big)^{-1},$$

тем самым, доказана формула Эрланга

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{\rho^k}{k!} \Big)^{-1}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n\,.$$

При $k = n$ получаем вероятность того, что все линии заняты, а значит, вновь поступившее требование будет отвергнуто, то есть вероятность получить отказ

$$p_n = \frac{\rho^n}{n!}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{\rho^k}{k!}\Big)^{-1}.$$

Система массового обслуживания с ожиданием

На вход системы поступает пуассоновский поток заявок с плотностью λ. Система имеет n обслуживающих устройств. Время обслуживания одной заявки ν показательно распределено с параметром μ, $M\nu = \frac{1}{\mu}$. Заявка, заставшая все устройства занятыми, становится в очередь и ожидает обслуживания, время ожидания ограничено некоторым сроком T, поистечении которого заявка теряется. Срок ожидания будем считать случайным и распределенным по показательному закону с параметром h. Величина $1/h$ среднее время ожидания в очереди. Число требований ξ_t в системе может принимать значения $0, 1, 2, \ldots$. Опишем каждое из них:

$\xi_t = 0$ – ни одно из устройств не занято, очереди нет;
$\xi_t = 1$ – занято ровно одно устройство, очереди нет;
. . . .
$\xi_t = n$ – заняты все каналы, очереди нет;
$\xi_t = n + 1$ – заняты все каналы, в очереди 1 заявка;
. . . .
$\xi_t = n + s$ – заняты все каналы, в очереди s заявок;
. . . .

Для первых n значений $k = 0, \ldots, n-1$ система дифференциальных уравнений строится как в система массового обслуживания с потерями.

$$
\begin{aligned}
&P_0'(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t)\\
&P_k'(t) = -(\lambda + k\mu)P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t) + (k+1)\mu P_{k+1}(t)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&P_{n-1}'(t) = -(\lambda + (n-1)\mu)P_{n-1}(t) + \lambda P_{n-2}(t) + n\mu P_n(t)
\end{aligned}
$$

Найдем $P_n(t + \Delta t)$. Основной вклад в $P_n(t + \Delta t)$ вносят вероятности следующих событий:

1. В момент t система была в состоянии $\xi = n$ и за время Δt не вышла из него (не пришло ни одно требование, ни одно из устройств не освободилось).

2. В момент t состема была в состоянии $\xi = n - 1$ и за время Δt перешла в состояние $\xi = n$ (пришло одно требование).

3. В момент t система была в состоянии $\xi = n + 1$ и за время Δt перешла в состояние $\xi = n$ (либо освободилось одно из устройств и стоящая в очереди заявка заняла его, либо стоящая в очереди заявка в связи с истечением срока пребывания в очереди).

По формуле полной вероятности

$$P_n(t + \Delta t) = P_n(t)(1 - \lambda\Delta t - n\mu\Delta t) + P_{n-1}(t)\lambda\Delta t + P_{n+1}(t)(n\mu + h)\Delta t + o(\Delta t).$$

Далее, стандартной процедурой приходим к уравнению

$$P_n(t)' = -(\lambda + n\mu)P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + (n\mu + h)P_{n+1}(t)\,.$$

Вычислим $P_{n_s}(t + \Delta t)$, $\;s > 0$. Основной вклад в значение вероятности вносят события:

1. В момент t система была в состоянии $\xi = n + s$, за время Δt это состояние не изменилось (ни одна заявка не пришла, ни одно устройств не освободилось, ни одна из s стоящих в очереди требований не ушло).

2. В момент t система была в состоянии $\xi = n + s - 1$, за время Δt перешла в состояние $\xi = n + s$ (пришла одна заявка).

3. В момент t система была в состоянии $\xi = n+s+1$, за время Δtперешла в состояние $\xi = n+s$ (либо одно из устройств освободилось и тогда одна из $s+1$ заявок в очереди заняла освободившееся устройство, либо одна из заявок покинуло очередь).

Далее, по формуле полной вероятности находим

$$P_{n+s}(t+\Delta t) = P_{n+s}(t)(1-\lambda\Delta t - n\mu\Delta t - sh\Delta t) + P_{n+s-1}(t)\lambda\Delta t + P_{n+s+1}(t)(n\mu + (s+1)h)\Delta t + o(\Delta t)\,.$$

Предельным переходим приходим к уравнению

$$P'_{n+s}(t) = -(\lambda\Delta t + n\mu\Delta t + sh\Delta t)P_{n+s}(t) + \lambda P_{n+s-1}(t) + (n\mu + (s+1)h)P_{n+s+1}(t).$$

В установившемся режиме обслуживания вероятности $\lim_{t\to\infty} P_k(t) = p_k$ удовлетворяют системе алгебраических уравнений

В установившимся режиме обслуживания предельные вероятности $p_k = \lim_{t\to\infty} P_k(t)$ находятся из системы уравнений

$$\begin{aligned}
&-\lambda p_0 + \mu p_1 = 0\\
&\lambda p_0 - (\lambda+\mu)p_1 + 2\mu p_2 = 0\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\lambda p_{k-1} - (\lambda + k\mu)p_k + (k+1)\mu p_{k+1} = 0, \quad (1 \leqslant k \leqslant n-1)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\lambda p_{n-1} - (\lambda + n\mu)p_n + (n\mu + h)p_{n+1} = 0\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\lambda p_{n+s-1} - (\lambda + n\mu + sh)p_{n+s} + (n\mu + (s+1)h)p_{n+s+1} = 0\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Из первых n уравнений, как и в предыдущем разделе, находим, что

$$\begin{aligned}
&z_0 = -\lambda p_0 + \mu p_1 = 0\\
&z_1 - z_0 = -\lambda p_1 + 2\mu p_2 + \lambda p_0 - \mu p_1 = 0\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&z_{n-1} - z_{n-2} = -\lambda p_{n-1} + n\mu p_n + \lambda p_{n-2} - (n-1)\mu p_{n-1} = 0
\end{aligned}$$

Последовательно находим $z_0 = 0, \dots, z_n = 0$. Отсюда получаем, что

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} p_0, \quad k \leqslant n\,. \tag{1.12}$$

Из n-го уравнения находим

$$p_{n+1} = \frac{\lambda}{(n\mu + h)} p_n = \frac{\lambda^{n+1}}{n!\mu^n(n\mu + h)} p_0 \tag{1.13}$$

И далее последовательно получаем

$$p_{n+s} = \frac{\lambda^{n+s}}{n!\mu^n \prod_{m=1}^{s}(n\mu + mh)} p_0\,, \quad s \geqslant 1 \tag{1.14}$$

Из (1.12) и (1.14) получаем

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n+s}}{n!\mu^n \prod_{m=1}^{s}(n\mu + mh)}}\,. \tag{1.15}$$

Найденные предельные вероятности состояний системы позволяют находить другие характеристики системы. Например, среднее число заявок, находящихся в очереди, равное математическому ожиданию числа требований в очереди

$$\ell_q = \sum_{s=1}^{\infty} s\, p_{n+s} = \frac{\frac{\rho^n}{n!} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{s\rho^s}{\prod_{m=1}^{s}(n-m\beta)}}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\rho^s}{\prod_{m=1}^{s}(n+m\beta)}}, \tag{1.16}$$

где $\rho = \lambda/\mu$, $\beta = h/\mu$. Среднее число находящихся в системе заявок равно

$$\ell_s = \sum_{s=1}^{\infty} s\, p_{n+s} = \frac{\rho \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{s\rho^s}{\prod_{m=1}^{s}(n-m\beta)}}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\rho^s}{\prod_{m=1}^{s}(n+m\beta)}}, \tag{1.17}$$

В стационарном режиме нас будут интересовать также следующие характеристики:

w_q – средняя продолжительность пребывания заявки в очереди;

w_s – средняя продолжительность пребывания заявки в системе.

Между w_s и ℓ_s, также w_q и ℓ_q, существует взаимосвязь, так что, зная числовое значение одной из величин, можно найти значение другой величины. Так если чистота поступления заявок на обслуживание равняется λ, то имеем

$$\ell_s = \lambda w_s, \quad \ell_q = \lambda w_q.$$

При установившемся режиме можно подсчитать долю заявок, покинувших систему необслуженными.

Число заявок в очереди пополняется вновь поступающими требованиями Плотность поступления требований равна величине, обратной параметру λ. Поэтому произведение ℓ_q/λ есть среднее число поступивших заявок в единицу времени. Случайная величина T есть время ожидания требования в очереди. Параметр h является величиной обратной среднему сроку ожидания в единицу времени, т.е. средняя "плотность" нахождения одной заявки в очереди. Она же равна средней плотности ухода из очереди. В самом деле, представим себе заявку, которая только что и делает, что становится в очередь и ждет, пока не кончится срок ожидания T, после чего уходит и сразу же становится в очередь. Тогда количество уходов такой заявки из очереди в единицу времени будет иметь плотность $h = 1/m(T)$, где $m(T)$ – математическое ожидание случайной величины T. Поэтому среднее число ухода заявок из очереди ℓ_m пропорционально h и обратно пропорционально среднему числу поступающих заявок в единицу времени λ, то есть

$$\ell_m = \ell_q \cdot h/\lambda\,.$$

Поэтому вероятность что заявка покинет очередь равна

$$p_m = \ell_m/\ell_q\,.$$

Тогда вероятность, что заявка будет обслужена равна

$$q = 1 - p_m\,.$$

Эту величину называют относительной пропускной способностью системы.

Чистая система массового обслуживания с ожиданием

В случае чистой системы с ожиданием ($h/\mu \to 0$) заявки вообще не уходят из очереди, и поэтому $p_m = 0$, то есть каждая заявка рано или поздно дождется обслуживания. В чистой системе с ожиданием не всегда имеется предельный стационарный режим при $t \to \infty$. Можно доказать, что такой режим существует только при $\rho < n$. Если же $\rho \geqslant n$, то число заявок в очереди будет с течением времени неограниченно расти.

Предположим, что $\rho < n$. Чтобы найти предельные вероятности p_k для чистой системы с ожиданием положим в формулах (1.13), (1.14) и (1.15) $h = 0$. Получим

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n+s}}{n!\mu^{n+s}n^s}}\,, \tag{1.18}$$

или суммируя прогрессию приходим к

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}}\,. \tag{1.19}$$

Из соотношений (1.12) и (1.14) находим

$$p_k = \frac{\frac{\rho^k}{k!}}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}}, \quad (0 \leqslant k \leqslant n)$$

и

$$p_{n+s} = \frac{\frac{\rho^{n+s}}{n!n^s}}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}}, \quad (s \geqslant 1)\,.$$

Другие характеристики системы находятся как в (1.16) и (1.17), полагая $\beta = 0$:

$$\ell_q = \sum_{s=1}^{\infty} s\, p_{n+s} = \frac{\frac{\rho^n}{n!} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{s\rho^s}{n^s}}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\rho^s}{n^s}},$$

где $\rho = \lambda/\mu$, $\beta = h/\mu$. Среднее число находящихся в системе заявок равно

$$\ell_s = \sum_{s=1}^{\infty} s\, p_{n+s} = \frac{\rho \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{s\rho^s}{n^s}}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\rho^s}{n^s}}\,.$$

Чистая система массового обслуживания с ограничением по длине очереди

Имеется n-канальная система с ожиданием, в которой количество заявок, стоящих в очереди, ограничено числом r. В данном случае число состояний системы будет конечно и общее число заявок не может превышать $n + r$ (n обслуживаемых и r стоящих в очереди).

Ясно, что первые n уравнений для вероятностей $P_0(t), \ldots, P_{n-1}(t)$ будут совпадать с уравнениями Эрланга. Выведем остальные уравнения. Если заняты все n каналов, то

$$P_n(t + \Delta t) = P_{n-1}(t)\lambda\Delta t + P_n(t)(1 - \lambda\Delta t - n\mu\Delta t) + P_{n+1}(t)n\mu\Delta t + o(\Delta t)\,.$$

Из этого соотношения находим

$$P_n'(t) = \lambda P_{n-1}(t) - (\lambda + n\mu)P_n(t) + n\mu P_{n+1}(t)\,.$$

Уравнение для $P_{n+s}(t)$ $(1 \leqslant s < r)$ выводится из соотношения

$$P_{n+s}(t + \Delta t) = P_{n+s-1}(t)\lambda\Delta t + P_{n+s}(t)(1 - \lambda\Delta t - n\mu\Delta t) + P_{n+s+1}(t)n\mu\Delta t + o(\Delta t)\,.$$

Из него находим

$$P_{n+s}'(t) = \lambda P_{n+s-1}(t) - (\lambda + n\mu)P_{n+s}(t) + n\mu P_{n+s+1}(t)\,.$$

Последнее уравнение имеет вид

$$P_{n+r}'(t) = \lambda P_{n+r-1}(t) - n\mu P_{n+r}(t)\,.$$

В предельном случае, полагая $p_k = \lim_{t\to\infty} P_k(t)$ и приравнивая все производные к нулю, получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} -\lambda p_0 + \mu p_1 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda p_{k-1} - (\lambda + k\mu)p_k + (k+1)\mu p_{k+1} = 0, \quad (0 < k \leqslant n-1), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda p_{n-1} - (\lambda + n\mu)p_n + n\mu p_{n+1} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda p_{n+s-1} - (\lambda + n\mu)p_{n+s} + n\mu p_{n+s+1} = 0, \quad (1 \leqslant s < r), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda p_{n+r-1} - n\mu p_{n+r} = 0\,, \end{cases}$$

к которому добавим условие

$$\sum_{k=0}^{n+r} p_k = 1\,.$$

Система уравнений может быть решена как и ранее. Приведем окончательные формулы

$$p_k = \frac{\frac{\rho^k}{k!}}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \sum_{s=1}^{r} \left(\frac{\rho}{n}\right)^s} \quad (0 \leqslant k \leqslant n)$$

и

$$p_{n+s} = \frac{\frac{\rho^n}{n!} \left(\frac{\rho}{n}\right)^s}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \sum_{s=1}^{r} \left(\frac{\rho}{n}\right)^s} \quad (1 \leqslant s \leqslant r)\,.$$

Вероятность того, что заявка покинет систему необслуженной, равна вероятности p_{n+r} того, что в очереди уже стоят r заявок.

1.3. Гауссовский случайный процесс

Определение 46. Если конечные распределения процесса ξ_t для любых $t_1, \ldots, t_n$ являются нормально распределенными (гауссовскими), то процесс ξ_t называется гауссовским. Конечномерные распределения определяются вектором $M(\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_n}) = (M\xi_{t_1}, \ldots, M\xi_{t_n})$ и ковариационной матрицей с элементами $b_{ij} = M(\xi_{t_i} - M\xi_{t_i})(\xi_{t_j} - M\xi_{t_j}) = \mathrm{cov}(\xi_{t_i}, \xi_{t_j})$.

Определение 47. Для задания ковариационной матрицы $\{b_{ij}\}$ в моменты времени $t_1, \ldots, t_n$ необходимо и достаточно знать функцию $B(t,s)$, называемую ковариационной функцией процесса ξ_t:

$$B_\xi(t,s) = M(\xi_t - m_\xi(t))(\xi_s - m_\xi(s))\,.$$

Тогда для моментов наблюдения t_i и t_j

$$b_{ij} = B_\xi(t_i, t_j)\,.$$

Гауссовский процесс задан, если известно каким образом функция средних $m_\xi(t) = m(t) = M\xi_t$ и ковариационная функция $B(t,s) = M(\xi_t - m(t))(\xi_s - m(s)$ зависят от моментов наблюдения.

Определение 48. Корреляционная функция $R_\xi(t,s)$ процесса ξ_t определяется равенством

$$R_\xi(t,s) = M(\xi_t \xi_s)\,.$$

Функции $B_\xi(t,s)$ и $R_\xi(t,s)$ связаны соотношением

$$B_\xi(t,s) = M(\xi_{t_i} - M\xi_{t_i})(\xi_{t_j} - M\xi_{t_j}) = M(\xi_t\xi_s) - m_\xi(t)m_\xi(s) = R_\xi(t,s) - m_\xi(t)m_\xi(s)\,.$$

Отсюда следует, что для определения гауссовского процесса ξ_t достаточно знать функцию средних $m_\xi(t)$ и либо $B_\xi(t,s)$, либо $R_\xi(t,s)$.

Корреляционная функция случайного процесса ξ_t неотрицательно определена. Действительно, $R(t,s) = R(s,t)$ и каково бы ни были действительные числа $t_1, \ldots, t_n$, комплексные $c_1, \ldots, c_n$ и целое число n имеет место следующее соотношение

$$0 \leqslant M|\sum_{k=1}^n c_k \xi_{t_k}|^2 = M\{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i \overline{c_j} \xi_{t_i} \xi_{t_j}\} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n R(t_i, t_j) c_i \overline{c_j}\,.$$

Для гауссовского процесса любая плотность совместного распределения выборки $\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_n}$ зависит только от средних значений $\{M\xi_{t_i}\}$ и ковариаций b_{ij}. Поэтому знание $m_\xi(t)$ и $B_\xi(t,s)$ необходимо и достаточно для описания гауссовского случайного процесса.

Функции $m_\xi(t)$, $B_\xi(t,s)$, $R_\xi(t,s)$ могут быть точно также определены и для негауссовского случайного процесса ξ_t. В негауссовском случае знание только этих функций, вообще говоря, недостаточно для того, чтобы полностью задать процесс.

Для любой действительной функции $m(t)$ на T и любой действительной неотрицательной определенной функции $R(t,s)$ на $T \times T$ существует гауссовская случайная функция ξ_t с $m(t) = M\xi_t$ и $R(t,s)$ в качестве корреляционной функции. В качестве $F_{t_1,\ldots,t_n}$ берем n-мерное нормальное распределение с вектором математических ожиданий $(m(t_1), \ldots, m(t_n))$ и матрицей ковариаций $\{B(t_j, t_k)\}_{j,k=1}^n$. Для существования такового достаточно неотрицательной определенности матрицы ковариаций. Согласованность распределений вытекает из того, что нормальное распределение однозначно определяется математическим ожиданием и матрицей ковариаций и тем, что распределение любого подвектора нормального вектора снова нормально (см. теорему Колмогорова).

Пример 6. По теореме Бохнера-Хинчина функция $\exp(-|u|)$ является корреляционной функцией гауссовского случайного процесса.

Гауссовский процесс ξ_t является стационарным, если плотность конечномерных распределений не меняется при сдвиге начала отсчета. Поэтому для стационарного процесса

$$m_\xi(t) = M\xi_t = M\xi_{t+\tau} = m_\xi(t+\tau) = \overline{m} = \mathrm{const}$$

и
$$B_\xi(t,s) = M\xi_t\xi_s - \overline{m}^2 = M\xi_{t+\tau}\xi_{s+\tau} - \overline{m}^2 = B_\xi(t+\tau, s+\tau)$$
для всех $t, s \in T$. В частности, если положить $\tau = -s$, то для всех t и s должно выполняться равенство $B\xi(t,s) = B\xi(t-s,0) = B\xi(t-s)$, то есть ковариационная функция должна зависеть только от длины интервала между моментами наблюдения. Условия, при которых гауссовский процесс является стационарным, записывается в виде

$$m_\xi(t) = \overline{m} = \text{const}$$
$$B_\xi(t,s) = B_\xi(t-s)\,.$$

Назовем стационарный процесс непрерывным, если $\lim_{u\to\infty} R(u) = R(0)$. Для непрерывного стационарного процесса корелляционная функция $R(u)$ является непрерывной функцией от u.

$$\begin{aligned}&|R(u+\Delta) - R(u)| = |M(\xi_{u+\Delta}\xi_0) - M(\xi_u\xi_0)| = |M(\xi_0[\xi_{u+\Delta} - \xi_u]| \leqslant \\ &\leqslant \sqrt{M\xi_0^2\, M[\xi_{u+\Delta} - \xi_u]^2} = \sqrt{R(0)}\sqrt{2(R(0) - R(\Delta))} \to 0 \quad \text{при} \quad \Delta \to 0\end{aligned}$$

так как

$$M[\xi_{u+\Delta} - \xi_u]^2 = M\xi_{u+\Delta}^2 + M\xi_u^2 - 2M(\xi_{u+\Delta}\xi_u) = 2(R(0) - R(\Delta))\,.$$

Из неравенства Коши-Буняковского следует, что

$$|R(u)| = |M\xi_u\xi_0| \leqslant \sqrt{M\xi_u^2}\sqrt{M\xi_0^2} = \sqrt{R(0)}\sqrt{R(0)} = R(0)\,.$$

Таким образом, корреляционная функция стационарного процесса является неотрицательно определенной четной функцией и удовлетворяет неравенству $|R(u)| \leqslant R(0)$.

Понятие стохастического интеграла

Пусть на $T = [a,b]$ задан случайный процесс ξ_t и числовая функция $f(t)$. Разобьем $[a,b]$ точками $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ и рассмотрим сумму

$$\zeta_n = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\xi_{t_i}(t_i - t_{i-1})\,.$$

Если при $\max_{1\leqslant i\leqslant n} \Delta t_i$ эта сумма стремится к некоторому пределу ζ_t (случайной величине), то этот предел называется интегралом от случайного процесса ξ_t и обозначается символом

$$\zeta = \int_a^b f(t)\xi_t dt$$

Несобственный интеграл (при $a = -\infty$ и $b = \infty$) определяется обычным образом как предел собственных интегралов при $a \to -\infty$ и $b \to \infty$.

Сходимость интегральных сумм ζ_n понимается в следующем смысле: существует случайная величина J такая, что при $n \to \infty$

$$M(\zeta_n - \zeta)^2 \to 0\,. \tag{1.20}$$

Замечание. В теории мера и интеграла доказывается, что последовательность случайных величин ζ_n сходится к пределу ζ в смысле (1.20) тогда и только тогда, когда при $n, m \to \infty$

$$M(\zeta_n - \zeta_m)^2 \to 0\,. \tag{1.21}$$

Теорема 1.5. *Для существования интеграла*

$$\zeta = \int\limits_a^b f(t)\xi_t dt$$

достаточно, чтобы существовал интеграл

$$A = \int\limits_a^b \int\limits_a^b R(t,s) f(t) f(s) dt ds\,.$$

При этом

$$A = M\big[\int\limits_a^b f(t)\xi_t dt\big]^2\,.$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}
&M(\zeta_n-\zeta_m)^2 = M\big[\sum_{i=1}^n f(t_i)\xi_{t_i}\Delta t_i\big]^2 - \\
&-2M\big[\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m f(t_i)f(s_j)\xi_{t_i}\xi_{s_j}\Delta t_i\Delta s_j\big] + M\big[\sum_{j=1}^m f(s_j)\xi_{s_j}\Delta s_j\big]^2 = \\
&\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n f(t_i)f(\tau_k)R(t_i,\tau_k)\Delta t_i\Delta\tau_k - 2\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m f(t_i)f(s_j)R(t_i,s_j)\Delta t_i\Delta s_j + \\
&+\sum_{j=1}^m\sum_{k=1}^m f(s_j)f(\sigma_k)R(s_j,\sigma_k)\Delta s_j\Delta\sigma_k\,.
\end{aligned}$$

Здесь $t_i=\tau_i$ и $s_j=\sigma_j$. Согласно последнему замечанию

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{\max(\Delta t_i,\Delta\tau_j)\to 0}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n f(t_i)f(\tau_j)R(t_i,\tau_j)\Delta t_i\Delta\tau_j = \\
&= \lim_{\max(\Delta t_i,\Delta s_j)\to 0}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m f(t_i)f(s_j)R(t_i,s_j)\Delta t_i\Delta s_j = \\
&= \lim_{\max(\Delta s_j,\Delta\sigma_k)\to 0}\sum_{j=1}^m\sum_{k=1}^m f(s_j)f(\sigma_k)R(s_j,\sigma_k)\Delta s_j\Delta\sigma_k\,.
\end{aligned}$$

Таким образом, при $\min(m,n)\to\infty$ имеем $M(\zeta_m-\zeta_n)^2\to 0$.

Для доказательства второго утверждения теоремы заметим, что

$$\begin{aligned}
M\big[\sum_{i=1}^n f(t_i)\xi_{t_i}\Delta t_i\big]^2 &= M\big[\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n f(t_i)f(\tau_j)\xi_{t_i}\xi_{\tau_j}\Delta t_i\Delta\tau_j\big] = \\
&\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n f(t_i)f(\tau_j)R(t_i,\tau_j)\Delta t_i\Delta\tau_j\,,
\end{aligned}$$

при $\max\Delta t_i\to 0$ правая часть равенства стремится к A. $\square$

Для существования несобственного интеграла (при $a = -\infty$ и $b = \infty$) достаточно существования несобственного интеграла

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R(t,s) f(t) f(s) dt ds \,.$$

В частности, для стационарного случайного процесса с корреляционной функцией $R_\xi(u)$ интеграл

$$\eta_t = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-s)\xi_s ds$$

при любом $t \in T$ существует, если конечен интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R(s_1 - s_2) h(t-s_1) h(t-s_2) ds_1 ds_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R(s_1 - s_2) h(s_1) h(s_2) ds_1 ds_2 \,.$$

Для случайного процесса ξ_t на входе линейного фильтра функция средних и корреляционная функция для процесса η_t на выходе фильтра

$$\eta_t = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-s)\xi_s ds$$

имеют вид

$$m_\eta(t) = M\Big[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-s)\xi_s ds\Big] = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-s) M\xi_s ds = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-s) m_\xi(s) ds \tag{1.22}$$

и

$$\begin{gathered} R_\eta(t,s) = M\Big[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-u)\xi_u du \int_{-\infty}^{\infty} h(s-v)\xi_v dv\Big] = \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t-u) h(s-v) M[\xi_u \xi_v] du dv = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t-u) h(s-v) R(u,v) du dv \,. \end{gathered} \tag{1.23}$$

Возможность поменять местами знак математического ожидания и интегрирования не вызывает сомнения, если пространство элементарных событий состоит из конечного числа элементарных событий $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, которые имеют вероятности $p_i, \ i = 1, \ldots, n$. Тогда

$$\begin{aligned} m_\eta(t) = \sum_{i=1}^{n} \eta_t(\omega_i) p_i = \sum_{i=1}^{n} p_i \int_{-\infty}^{\infty} h(t-u)\xi_u(\omega_i) du = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-u) \sum_{i=1}^{n} p_i \xi_u(\omega_i) du = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-u) m_\xi(u) du \,. \end{aligned}$$

Корреляционная функция процесса может быть получена аналогичным образом:

$$R_\eta(t,s) = M[\eta_t\eta_s] = M\Big[\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(t-u)\xi_u du \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(s-v)\xi_v dv\Big] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(t-u)\xi_u(\omega_i)du \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(s-v)\xi_v(\omega_i)dv =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(t-u)h(s-v)\xi_u(\omega_i)\xi_v(\omega_i)dudv =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \big(\sum_{i=1}^{n} p_i\xi_u(\omega_i)\xi_v(\omega_i)\big)h(t-u)h(s-v)dudv =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} M[\xi_u\xi_v]h(t-u)h(s-v)dudv\,.$$

Рассмотрим случай, когда ξ_t является стационарным процессом. В этом случае $m_\xi(t) = \overline{m}_\xi =$ const и $R_\xi(t,s) = R_\xi(|t-s|)$. После подстановки этих условий в (1.22) и (1.23) получим

$$m_\eta(t) = \overline{m}_\xi \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(t-u)du = \overline{m}_\xi \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(u)du = \overline{m}_\eta$$

и

$$R_\eta(t,s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} R_\xi(u-v)h(t-u)h(s-v)dudv\,.$$

После замены переменных имеем

$$R_\eta(t,s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} R_\xi(t-s+u-v)h(u)h(v)dudv. \tag{1.24}$$

Поскольку правая часть в этом равенстве зависит только от $t-s$, приходим к выводу, что если $R_\xi(t,s)$ является функцией разности $t-s$, то же самое верно и относительно $R_\eta(t,s)$. То есть процесс на выходе линейного фильтра является стационарным, если на вход фильтра подается стационарный процесс.

Теорема 1.6. *Если на вход линейного фильтра подается гауссовский процесс, то на его выходе будет также гауссовский процесс.*

Доказательство. Заменим интеграл конечной суммой

$$\eta_t^n = \sum_{i=1}^{n} \xi_{s_i} h(t-s_i)\Delta s_i\,.$$

По свойству нормальных случайных величин линейная комбинация таких величин является нормально распределенной. Поэтому η_t^n является гауссовским процессом. Выберем последовательность разбиений $\{s_k\}_{k=1}^n$, $n=1,2,\ldots$, так, чтобы $M(\eta_t^n-\eta_t)^2 \to 0$. Тогда

$$R_{\eta^n}(u) = M\big(\eta_u^n\eta_0^n\big) \to M\big(\eta_u\eta_0\big) = R_\eta(u)$$

и

$$m_{\eta^n}(t) = M\eta_t^n \to M\eta_t = m_\eta = m_\eta(t)$$

Отсюда следует, что для каждого набора моментов наблюдений $t_1, \dots, t_m$ нормальные конечномерные распределения $F^n_{t_1,\dots,t_m}$ слабо сходятся к нормальному конечномерному распределению $F_{t_1,\dots,t_m}$. □

В качестве примера рассмотрим двумерный вектор наблюдений моментов (t_1, t_2). Пусть

$$P\{\eta^n_{t_1} \leqslant u_1, \eta^n_{t_2} \leqslant u_2\} = \frac{1}{2\pi\sqrt{|B^n|}} \int\limits_{-\infty}^{u_1}\int\limits_{-\infty}^{u_2} \exp\Big\{-\frac{1}{2}(u-m^n)(B^n)^{-1}(u-m^n)'\Big\} du_1 du_2 \to$$

$$\to \frac{1}{2\pi\sqrt{|B|}} \int\limits_{-\infty}^{u_1}\int\limits_{-\infty}^{u_2} \exp\Big\{-\frac{1}{2}(u-m)B^{-1}(u-m)'\Big\} du_1 du_2 = P\{\eta_{t_1} \leqslant u_1, \eta_{t_2} \leqslant u_2\}\,.$$

Здесь

$$m^n = (m^n_\eta(t_1), m^n_\eta(t_2)), \quad B^n = \begin{pmatrix} B^n_\eta(t_1,t_1) & B^n_\eta(t_1,t_2) \\ B^n_\eta(t_2,t_1) & B^n_\eta(t_2,t_2) \end{pmatrix},$$

$$m = (m_\eta(t_1), m_\eta(t_2)), \quad B = \begin{pmatrix} B_\eta(t_1,t_1) & B_\eta(t_1,t_2) \\ B_\eta(t_2,t_1) & B_\eta(t_2,t_2) \end{pmatrix}$$

и $u = (u_1, u_2)$. Предельный переход под знаком интеграла возможен.

Определение 49. Случайный процесс ξ_t называется стационарным в широком смысле, если функция средних $m_\xi(t)$ постоянна, а корреляционная функция $R_\xi(t,s)$ зависит только от $|t-s|$.

Определенный ранее стационарный процесс называют стационарным в узком смысле. Любой процесс, стационарный в узком смысле является стационарным в широком смысле. Обратное неверно.

Гауссовский процесс стационарный в широком смысле является стационарным и в узком смысле.

Пример 7. Пусть

$$\xi_t = \xi\cos\lambda t + \eta\sin\lambda t\,,$$

где ξ и η – некоррелированные случайные величины, для которых $M\xi = M\eta = 0$, $D\xi = D\eta = 1$, а λ – постоянная величина. Так как

$$\begin{aligned} R(u) &= M\xi_{t+u}\xi_t == M\big[\xi\cos\lambda(t+u) + \eta\sin\lambda(t+u)\big]\big[\xi\cos\lambda t + \eta\sin\lambda t\big] = \\ &= M\big[\xi^2\cos\lambda t\cos\lambda(t+u) + \xi\eta(\sin\lambda(t+u)\cos\lambda t + \cos\lambda(t+u)\sin\lambda t) + \eta^2\sin\lambda t\sin\lambda(t+u)\big] = \\ &= \cos\lambda t\cos\lambda(t+u) + \sin\lambda t\sin\lambda(t+u) = \cos\lambda u\,, \end{aligned}$$

то процесс ξ_t стационарен в широком смысле. Корреляционная функция этого процесса имеет представление

$$R_\xi(u) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos ux\, dF(x)\,,$$

где

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant -\lambda, \\ 0,5 & \text{при } -\lambda < x \leqslant \lambda, \\ 1 & \text{при } x > \lambda\,. \end{cases}$$

Обзор свойств преобразования Фурье

В контексте теории связи определим пару интегральных преобразований: преобразование Фурье

$$X(f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t) exp\{-2\pi i f t\} dt$$

и обратное преобразование Фурье

$$x(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} X(f) exp\{2\pi i f t\} df \,.$$

Переменную t будем трактовать как время, а переменную f как частоту. Данная пара преобразований используется при описании частотно-временных соотношений непериодических сигналов. Операцию преобразования Фурье будем обозначать $\mathcal{F}\{x(t)\} = X(f)$, а обратное – через $\mathcal{F}^{-1}\{X(f)\} = x(t)$. Запись $x(t) \leftrightarrow X(f)$ означает, что $X(f)$ получается применением преобразования Фурье к функции $x(t)$, а $x(t)$ – результат применения преобразования Фурье к $X(f)$. Для нас $x(t)$ – вещественная функция, а $X(f)$ – комплекснозначная функция. В полярной форме спектр $X(f)$ можно задать через его амплитудную и фазовую характеристики

$$X(f) = |X(f)| e^{i\theta(f)} \,.$$

Если $x(t)$ принимает вещественные значения, то

$$X(-f) = \overline{X(f)} = |X(f)| e^{-i\theta(f)} \,.$$

Поэтому амплитудный спектр – это четная функция переменной f, а фазовая функция – нечетная функция от f.

Если $x(t) \leftrightarrow X(f)$, то

$$\mathcal{F}\{x(t-t_0)\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0) e^{-2\pi i f t} dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(\mu) e^{-2\pi i f(\mu+t_0)} d\mu = X(f) e^{-2\pi i f t_0} \,.$$

и

$$\mathcal{F}\{x(t) e^{2\pi i f_0 t} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{2\pi i f_0 t} e^{-2\pi i f t} dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-2\pi i (f-f_0)} t dt = X(f-f_0) \,.$$

Так называемая δ-функция или импульсная функция определяется как предел семейства функций $\left\{\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right\}$, $x \in \mathbf{R}$, при $\varepsilon \to 0$, где φ – любая неотрицательная интегрируемая функция, удовлетворяющая соотношению $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt = 1$. Импульсная функция обладает свойствами

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t-t_0) dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t) \varphi_\varepsilon(t-t_0) dt = x(t_0) \,,$$

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \mathcal{F}^{-1}\{\delta(t)\} = 1 \,.$$

Интеграл свертки двух функций $h(t)$ и $x(t)$ определяется как

$$y(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(t-u) x(u) du$$

или в сокращенной записи

$$y(t) = h(t) * x(t) \,.$$

Если $x_1(t) \leftrightarrow X_1(f)$ и $x_2(t) \leftrightarrow X_2(f)$, то

$$x_1(t) * x_2(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau \leftrightarrow \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)e^{-2\pi i f t}d\tau dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\int\limits_{-\infty}^{\infty} x_2(t-\tau)e^{-2\pi i f t}dtd\tau = X_2(f)\int\limits_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)e^{-2\pi i f \tau}d\tau = X_1(f)X_2(f)\,.$$

Следовательно, операцию свертки во временной области можно заменить умножением в частотной области

$$x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(f)X_2(f)\,.$$

Ввиду симметрии пары преобразований Фурье, умножение во временной области переходит в свертку в частотной области

$$x_1(t)x_2(t) \leftrightarrow X_1(f) * X_2(f)\,.$$

Теорема Парсеваля утверждает, что энергия сигнала во временной области равна энергии сигнала в частотной области

$$E_x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df\,.$$

Гауссовский процесс (продолжение)

Вернемся к рассмотрению стационарного гауссовского случайного процесса. Введем преобразование Фурье $\mathcal{F}\{R_\xi(\tau)\} = C_\xi(f)$ и $\mathcal{F}\{R_\eta(\tau)\} = C_\eta(f)$ корреляционных функций $R_\xi(\tau)$ и $R_\eta(\tau)$ процессов ξ_t и η_t на входе и выходе линейного фильтра

$$\eta(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(t-u)\xi_u du$$

с импульсным откликом $h(t)$.

Если в соотношение (1.24) вместо $t-s$ подставить τ и в интеграле представить $R_\xi(\tau-\mu-\nu)$ через $C_\xi(f)$, то равенство примет вид

$$R_\eta(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} C_\xi(f)\exp(2\pi i f(\tau+\mu-\nu))h(\mu)h(\nu)dfd\mu d\nu =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} C_\xi(f)\exp(2\pi i f\tau)\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(\mu)\exp(2\pi i f\mu)d\mu\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(\nu)\exp(-2\pi i f\nu)d\nu\,.$$

Преобразование Фурье $\mathcal{F}\{h(\tau)\} = H(f)$ называется передаточной функцией линейного фильтра с импульсным откликом $h(\tau)$. Так как $\mathcal{F}^{-1}\{h(\tau)\} = \overline{H(f)}$, то

$$R_\eta(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} C_\xi(f)|H(f)|^2\exp(2\pi i f\tau)df \tag{1.25}$$

Отсюда получаем

$$C_\eta(f) = C_\xi(f)|H(f)|^2 \tag{1.26}$$

Таким образом, воздействие линейного фильтра на гауссовский стационарный процесс полностью описывается соотношением (1.26).

Для стационарного процесса

$$M\eta_t^2 = R_\eta(t,t) = R_\eta(t-t) = R_\eta(0)\,,$$

поэтому $R_\eta(0)$ интерпретируется как математическое ожидание мощности стационарного процесса. Из равенств (1.25) и (1.26) следует соотношение

$$R_\eta(0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} C_\eta(f)df = \int\limits_{-\infty}^{\infty} C_\xi(f)|H(f)|^2 df = M\eta_t^2\,.$$

Функцию $C_\xi(f)$ называют спектральной плотностью мощности процесса ξ_t или энергетическим спектром. Поясним сказанное. Рассмотрим идеальный полосовой фильтр с частотной характеристикой

$$H(f) = \begin{cases} 1, & \text{при } \ f_1 \leqslant |f| \leqslant f_2 \\ 0, & \text{при остальных } \ f\,. \end{cases} \tag{1.27}$$

Тогда

$$R_\eta(0) = \int\limits_{-f_2}^{-f_1} C_\xi(f)df + \int\limits_{f_1}^{f_2} C_\xi(f)df\,.$$

Поэтому $R_\eta(0)$ можно рассматривать как усредненную мощность процесса ξ_t в узкой полосе частот шириной Δf с центром в $f_0 = (f_1 + f_2)/2$, приблизительно равную $2C_\xi(f_0)\Delta f$. По этой причине $C_\xi(f)$ интерпретируют как распределение по частоте средней мощности процесса ξ_t.

Отметим, что поскольку $R_\xi(\tau)$ – четная функция,то

$$C_\xi(f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} R_\xi(\tau)\cos(2\pi f\tau)d\tau$$

также является четной функцией.

Предложение 1.1. *Спектральная плотность мощности процесса $C_\xi(f)$ – неотрицательная функция.*

Доказательство. Если бы свойство было неверным, то можно было бы выбрать частоты f_1 и f_2 для идеального полосового фильтра с частотной характеристикой 1.27 так, чтобы

$$\int\limits_{f_1}^{f_2} C_\xi(f)df < 0\,.$$

Это противоречит неотрицательности $M\eta_t^2$, так как

$$\int\limits_{f_1}^{f_2} C_\xi(f)df = \frac{1}{2}R_\eta(0) = \frac{1}{2}M\eta_t^2\,.$$

□

Пусть теперь гауссовский процесс ξ_t подается на вход двух линейных фильтров, соединенных параллельно. Рассмотрим вектор выборочных значений

$$\overline{W}(u,v) = (\eta_{u_1},\ldots,\eta_{u_k},\zeta_{v_1},\ldots,\zeta_{v_\ell})\,,$$

полученный наблюдением процесса η_u на выходе первого фильтра в моменты $\{u_i\}_{i=1}^k$ и процесса ζ_v на выходе второго фильтра в моменты $\{v_j\}_{j=1}^{\ell}$. Вектор $\overline{W}$ получен в результате линейных преобразований процесса ξ_t. Поэтому $\overline{W}$ является гауссовским вектором для любых моментов наблюдения $\{u_i\}$ и $\{v_j\}$.

Это утверждение остается верным и для выборки $\overline{W}$ из процессов на выходе $N > 2$ параллельно соединенных фильтров.

Определение 50. Совокупность из N случайных процессов называется совместно гауссовской, если любой вектор, построенный подобно вектору $\overline{W}$, оказывается совместно гауссовским.

Каждый из двух процессов η_u и ζ_v определен, если известны функции средних и корреляционные функции этих процессов. Однако для того, чтобы задать плотность совместного распределения вероятностей вектора $\overline{W}$ необходимо знать ковариацию любой пары векторов η_{u_i}, ζ_{v_j}. Таким образом, чтобы процессы η_u и ζ_v были определены совместно должны быть заданы ковариации

$$M(\eta_{u_i}\zeta_{v_j}) - m_\eta(u_i)m_\zeta(v_j)$$

для любой пары моментов наблюдений (u_i, v_j). Эти дополнительные сведения содержатся в функции

$$R_{\eta\zeta}(u,v) = M(\eta_u\zeta_v),$$

которая называется совместно корреляционной функцией процессов η_u и ζ_v

$$R_{\eta\zeta}(u,v) = M\Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \xi_{u-\alpha}h_\eta(\alpha)d\alpha \int\limits_{-\infty}^{\infty} \xi_{v-\beta}h_\zeta(\beta)d\beta\Big) =$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} M(\xi_{u-\alpha}\xi_{v-\beta})h_\eta(\alpha)h_\zeta(\beta)d\alpha d\beta = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} R_\xi(u-\alpha, v-\beta)h_\eta(\alpha)h_\zeta(\beta)d\alpha d\beta$$

Для стационарного процесса ξ_t имеем

$$R_{\eta\zeta}(u,v) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} R_\xi(u-v+\alpha-\beta)h_\eta(\alpha)h_\zeta(\beta)d\alpha d\beta =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} C_\xi(f)\exp(2\pi i f(u-v+\alpha-\beta))h_\eta(\alpha)h_\zeta(\beta)d\alpha d\beta df =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} C_\xi(f)\exp(2\pi i f(u-v))\Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} h_\eta(\alpha)e^{2\pi i f\alpha}d\alpha \int\limits_{-\infty}^{\infty} h_\zeta(\beta)e^{-2\pi i f\beta}d\beta\Big)df\,.$$

Таким образом, $R_{\eta\zeta}(u,v)$ является функцией разности $u-v$ и

$$R_{\eta\zeta}(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} C_\xi(f)H_\eta(f)\overline{H_\zeta(f)}e^{2\pi i f\tau}df\,. \qquad (1.28)$$

Поэтому корреляционные функции R_η, R_ζ и $R_{\eta\zeta}$ зависят только от разности аргументов и плотность распределения вероятностей вектора $\overline{W}$ не зависит от начала отсчета времени, если процесс ξ_t на входе фильтров стационарен. В таком случае процессы η_u и ζ_v называются совместно стационарными процессами.

Сказанное остается верным для совокупности из N случайных процессов на выходе линейных фильтров, соединенных параллельно.

Рассмотрим важный частный случай, когда носители передаточных функций $H_\eta(f)$ и $H_\zeta(f)$ не пересекаются, то есть $H_\eta(f)H_\zeta(f) = 0$. Тогда из (1.28) получаем, что $R_{\eta\zeta}(\tau) = 0$ для всех τ. Из стационарности процесса ξ_t следует, что $m_\xi(t) = \text{const}$. Так как

$$m_\eta(0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h_\eta(-v)m_\xi(0)dv = \text{const}\int\limits_{-\infty}^{\infty} h_\eta(v)dv = \text{const}\, H_\eta(0)\,,$$

и $H_\eta(0)H_\zeta(0) = 0$, поэтому $m_\eta(0)m_\zeta(0)$, то есть по меньшей мере у одного из фильтров должен быть нулевой отклик на постоянную сигнала. Отсюда следует, что функция ковариации $B_{\eta\zeta}(\tau)$ равна нулю. Так как ξ_t является гауссовским процессом, то это означает, что вектора

$$\overline{\eta}(u) = (\eta_{u_1}, \dots, \eta_{u_k}) \ \text{ и } \ \overline{\zeta}(v) = (\zeta_{v_1}, \dots, \zeta_{s_\ell})$$

независимы. Поэтому плотность совместного распределения $p_{\overline{W(u,v)}} = p_{\overline{\eta}(u),\overline{\zeta}(v)}$ равна произведению плотностей

$$p_{\overline{W(u,v)}}(\alpha,\beta)) = p_{\overline{\eta}(u)}(\alpha)p_{\overline{\zeta}(v)}(\beta)\,. \tag{1.29}$$

Если для всех моментов наблюдений $\{u_i\}_{i=1}^k$ и $\{v_j\}_{j=1}^\ell$ выполняется условие (1.29), то процессы η_u и ζ_v называются статистически независимыми.

Белый гауссовский шум

Термин "шум"в теории связи обозначает нежелательные электрические сигналы, которые всегда присутствуют в электрических системах. Природа шумов различна и включает как естественные, так и искусственные источники. Искусственные шумы – это шумы искусственных источников электромагнитного излучения. Естественные шумы исходят от атмосферы, солнца и других галактических источников. Гауссово распределение часто используется как модель шума в системах, поскольку согласно центральной предельной теореме при весьма общих условиях распределение вероятностей больших сумм случайных величин в пределе подчиняется гауссовому распределению. Путем фильтрации и экранирования влияние шумов на полезный сигнал можно снизить или даже устранить. Но существует один естественный шум, называемый тепловым, который устранить нельзя. Тепловой шум вызывается тепловым движением электронов в электрических приборах. Те же электроны, которые отвечают за электропроводимость, являются причиной теплового шума. Тепловой шум можно описать как стационарный случайный процесс с нулевой функцией средних. Во многих приложениях теории связи приходится сталкиваться с источниками физического шума, в которых спектральная плотность мощности гауссовского шума, накладывающегося на полезный сигнал, остается практически постоянной вплоть до частот, много более высоких, чем частоты, являющиеся основными в самом сигнале. Поэтому предполагается, что энергетический спектр шума является постоянным на всех частотах и вводится понятие белого гауссова шума n_t как стационарного гауссовского процесса с нулевым средним и с постоянной спектральной плотностью мощности

$$C_n(f) = N_0/2, \ \ -\infty < f < \infty\,.$$

Такой шум, будучи пропущенным через линейный фильтр, для которого

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df < \infty,$$

превращается на выходе фильтра в стационарный гауссовскмй процесс μ_t с нулевым средним значением. Из равенства (1.26) получаем:

$$C_\mu(f) = \frac{N_0}{2}|H(f)|^2\,,$$

отсюда следует, что мощность процесса равна

$$M\mu_t^2 = R_\mu(0) = \frac{N_0}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df\,.$$

Корреляционная функция процесса на выходе фильтра имеет вид

$$R_\mu(\tau) = \frac{N_0}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 \cos(2\pi f\tau) df\,. \tag{1.30}$$

Корреляционная функция белого шума получается непосредственно из выражения для спектральной плотности мощности белого шума

$$C_n(f) = \frac{N_0}{2} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2}\delta(\tau)e^{-2\pi i f\tau} d\tau\,,$$

где $\delta(\tau)$ – функция Дирака. Таким образом, процесс n_t задается корреляционной функцией

$$R_n(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)\,.$$

Отсюда следует, что любые выборочные значения белого гауссова шума являются статистически независимыми, как бы близко не выбирались моменты их наблюдения. В этом смысле белый гауссовский шум описывает предельную случайность. Подставляя $R_n(\tau)$ в (1.24) получаем представление корреляционной функции процесса на выходе линейного фильтра, на вход которого подается белый шум

$$R_n(\tau) = \frac{N_0}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau + u - v)h(u)h(v) du dv = \frac{N_0}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(u-\tau)h(u) du\,.$$

Заменяя операцию свертки во временной области умножением в частотной области, приходим снова к равенству (1.30).

В качестве примера рассмотрим идеальный фильтр нижних частот с передаточной функцией

$$W(f) = \begin{cases} 1, & |f| < W, \\ 0, & \text{при остальных } f\,. \end{cases}$$

Если на вход этого фильтра поступает белый гауссовский шум n_u, то функция средних $m_\mu(t)$ процесса на выходе μ_t определяется равенством

$$m_\mu(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} m_n(u)h(t-u) du\,.$$

Но по определению процесса n_u функция средних $m_n(u)$ равна нулю, так что $m_\mu(t) = 0$. Корреляционная и ковариационная функции процесса на выходе задаются соотношением

$$B(\tau) = R(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} C_\mu(f)|W(f)|^2 \cos 2\pi f\tau df =$$

$$= \frac{N_0}{2} \int\limits_{-W}^{W} \cos 2\pi f\tau df = \frac{N_0}{2} \frac{\sin 2\pi f\tau}{2\pi\tau}\Big|_{-W}^{W} = WN_0 \frac{\sin 2\pi W\tau}{2\pi W\tau}\,.$$

Следовательно, мощность процесса на выходе μ_t, равная

$$B_\mu(0) = R_\mu(0) = M\mu_t^2 = WN_0,$$

постоянна.

Рекомендуемая литература

ОСНОВНАЯ:

1. Севастьянов Б.А. Курс теории вероятностей и математической статистики. М.: Наука, 1982.

2. Боровков А.А. Теория вероятностей. М.: Эдиториал УРСС, 1999.

3. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1987.

4. Ширяев А.Н. Вероятность. М.: Наука, 1989.

9. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1988.

11. Розанов Ю.А. Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. М.: Наука, 1989.

12. Феллер В. Теория вероятностей и ее приложения. т. 1. М.: Мир, 1984.

15. Прохоров А.В., Ушаков В.Г., Ушаков Н.Г. Задачи по теории вероятностей: Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. М.: Наука, 1986.