НОВЫЕ АСПЕКТЫ ТЕОРИИ СЛОЖНОСТИ ТРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Е.А. Фоминых

Пусть Δ обозначает стандартный тетраэдр, и пусть $\dot{\Delta}$ — тетраэдр Δ с удаленными вершинами. *Идеальной триангуляцией* компактного 3-многообразия M с непустым краем называется реализация внутренности многообразия M в виде склейки конечного числа копий тетраэдра $\dot{\Delta}$ по аффинным гомеоморфизмам их граней. Идеальная триангуляция многообразия M называется *минимальной*, если она содержит наименьшее число тетраэдров среди всех идеальных триангуляций многообразия M. Число тетраэдров в минимальной триангуляции многообразия M называется *триангуляционной сложностью* многообразия M и обозначается $c_\Delta(M)$.

Как и другие инварианты многообразий, которые определены как минимум некоторого числа, триангуляционную сложность довольно трудно вычислять. Точные значения триангуляционной сложности в первую очередь известны для многообразий, табулированных при помощи компьютера. Полная таблица ориентируемых гиперболических многообразий с каспами до сложности 9 включительно, описанная в [1], содержит 162 182 минимальных идеальных триангуляций для 61 911 многообразий. Все эти многообразия вместе с триангуляциями включены в компьютерные программы SnapPy [2] и Regina [3], что позволяет использовать мощные компьютерные средства для их исследования. Р. Фриджерио, Б. Мартелли и К. Петронио классифицировали в [4] все компактные ориентируемые гиперболические 3-многообразия M конечного объема с непустым вполне геодезическим краем до сложности 4 включительно.

Относительно легко получить верхние оценки триангуляционной сложности многообразия, для этого достаточно построить какую-нибудь его триангуляцию. С другой стороны, задача отыскания нижних оценок намного сложнее. В настоящее время известно лишь несколько нижних оценок сложности произвольных 3-многообразий с непустым краем.

Первая оценка сложности основана на хорошо известном неравенстве В. Терстона [5]:

$$c_\Delta(M) \geqslant \frac{Vol(M)}{v_3}, \tag{1}$$

где M — гиперболическое многообразие с каспами, v_3 — объем правильного идеального гиперболического тетраэдра. В частности, любая идеальная триангуляция, включающая только правильные идеальные гиперболические тетраэдры, минимальна. Взятие конечнолистных накрытий над такими триангуляциями приводит к бесконечному числу минимальных триангуляций, для которых указанное выше неравенство является равенством. Впервые неравенство (1) было применено С. Анисовым в [6], где он установил точные значения сложности для конечнолистных накрытий дополнения узла восьмерка. Позднее полный список таких многообразий, состоящих из не более чем 25 правильных идеальных гиперболических тетраэдров, был построен Е. Фоминых, С. Гаруфалидисом, М. Гернером, В. Таркаевым и А. Весниным в [7] и доступен в [2]. К. Петронио и А. Веснин в [8] получили нижние оценки объемов дополнительных пространств двухмостовых узлов, что в совокупности с формулой (1) дает нижние оценки их сложности. М. Ишикава и К. Немото в [9] объединили эти оценки с верхними оценками триангуляционной сложности дополнений двухмостовых узлов и тем самым установили точные значения сложности для бесконечного семейства двухмостовых узлов. Отметим, что в общем случае разрыв между левой и правой частями неравенства (1) может быть сколь угодно большим.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 19-11-00151).

Пусть M — компактное 3-многообразия с непустым краем и $\mathcal{T}$ — его произвольная идеальная триангуляция. Обозначим через $\mathfrak{t}(\mathcal{T})$ и $\mathfrak{e}(\mathcal{T})$ соответственно число тетраэдров и число ребер триангуляции $\mathcal{T}$. Поскольку $\chi(M) = \mathfrak{e}(\mathcal{T}) - \mathfrak{t}(\mathcal{T})$, триангуляция $\mathcal{T}$ содержит наименьшее число ребер среди всех идеальных триангуляций многообразия M тогда и только тогда, когда она является минимальной, т.е. $c_\Delta(M) = \mathfrak{t}(\mathcal{T})$. Это простое наблюдение позволяет сводить задачу установления сложности многообразия к нахождению идеальной триангуляции, содержащей минимально возможное число ребер.

Р. Фриджерио, Б. Мартелли и К. Петронио заметили [10, Lemma 2.1], что для произвольной идеальной триангуляции справедливо неравенство

$$\mathfrak{e}(\mathcal{T}) \geqslant \mathfrak{b}(M), \tag{2}$$

где $\mathfrak{b}(M)$ — число компонент края многообразия M. Отсюда мы сразу получаем вторую известную нижнюю оценку триангуляционной сложности:

$$c_\Delta(M) \geqslant \mathfrak{b}(M) - \chi(M). \tag{3}$$

С. Матвеев и Е. Первова в [12] построили следующую нижнюю оценку триангуляционной сложности для произвольного замкнутого неприводимого ориентируемого 3-многообразия M:

$$c_\Delta(M) \geqslant 2\log_5 |Tor(H_1(M))| + \beta_1 - 1, \tag{4}$$

где $|Tor(H_1(M))|$ — порядок подгруппы кручения первой группы гомологий $H_1(M;\mathbb{Z})$ и β_1 — первое число Бетти многообразия M. Заметим, что среди всех табулированных многообразий указанного вида, а их более ста тысяч, оценка точна только для линзового пространства $L_{5,2}$. Поэтому задача построения нижней оценки триангуляционной сложности компактных 3-многообразий с непустым краем через их группы гомологий и исследование ее точности является довольно актуальной.

Наше исследование показало, что для нижних оценок сложности многообразий с краем более информативными являются их группы гомологий с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$. Оказалось, что число ребер триангуляции можно оценить снизу через второе число Бетти.

Предложение 1. *Пусть M — компактное 3-многообразие с непустым краем и $\mathcal{T}$ — его идеальная триангуляция. Тогда*

$$\mathfrak{e}(\mathcal{T}) \geqslant \beta_2(M;\mathbb{Z}_2) + 1.$$

Это сразу дает новую нижнюю оценку триангуляционной сложности многообразий с непустым краем.

Теорема 1. *Пусть M — компактное 3-многообразие с непустым краем. Тогда*

$$c_\Delta(M) \geqslant \beta_1(M;\mathbb{Z}_2).$$

Оказалось, что нижняя оценка триангуляционной сложности из теоремы 1 существенно сильнее оценки из неравенства (3).

Теорема 2. *Пусть M — компактное 3-многообразие с непустым краем. Тогда справедливо следующее неравенство:*

$$\beta_1(M;\mathbb{Z}_2) \geqslant \mathfrak{b}(M) - \chi(M).$$

Список литературы

[1] B. A. Burton, *The cusped hyperbolic census is complete*, arXiv: 1405.2695.

[2] M. Culler, N. M. Dunfield, M. Goerner, J. R. Weeks, *SnapPy, a computer program for studying the geometry and topology of 3-manifolds*, http://snappy.computop.org/.

[3] B. A. Burton, R. Budney, W. Pettersson, et al., *Regina: Software for low-dimensional topology*, https://regina-normal.github.io/.

[4] R. Frigerio, B. Martelli, C. Petronio, *Small hyperbolic 3-manifolds with geodesic boundary*, Experiment. Math. 13 (2004), 171–184.

[5] W. P. Thurston, *The geometry and topology of 3-manifolds*, Experiment. Math. 13 (2004), 171–184. Lecture Notes (Princeton University, Princeton, NJ, 1978).
[6] S. Anisov, *Exact values of complexity for an infinite number of 3-manifolds*, Mosc. Math. J., 5:2 (2005), 305–310.
[7] E. Fominykh, S. Garoufalidis, M. Goerner, V. Tarkaev, A. Vesnin, *A census of tetrahedral hyperbolic manifolds*, Experiment. Math. 25:4 (2016), 466–481.
[8] C. Petronio, A. Vesnin, *Two-sided bounds for the complexity of cyclic branched coverings of two-bridge links*, Osaka J. Math., 46:4 (2009), 1077–1095.
[9] M. Ishikawa, K. Nemoto, *Construction of spines of two-bridge link complements and upper bounds of their Matveev complexities*, Hiroshima Math. J., 46:2 (2016), 149–162.
[10] R. Frigerio, B. Martelli, C. Petronio, *Dehn filling of cusped hyperbolic 3-manifolds with geodesic boundary",*, J. Differential Geom., 64:3 (2003), 425–455.
[11] R. Frigerio, B. Martelli, C. Petronio, *Complexity and Heegaard genus of an infinite class of compact 3-manifolds*, Pacific J. Math, 210:2 (2003), 283–297.
[12] С. В. Матвеев, Е. Л. Первова, *Нижние оценки сложности трехмерных многообразий*, Доклады академии наук, 378:2 (2001), 151-152.
[13] S. V. Matveev, *Virtual 3-manifolds*, Сибирские электронные математические известия, 6 (2009), 518–521.
[14] А. Ю. Веснин, В. Г. Тураев, Е. А. Фоминых, *Сложность виртуальных трехмерных многообразий*, Математический сборник 207:11 (2016), 4–24.
[15] S. Matveev, *"Algorithmic topology and classification of 3-manifolds"*, Springer, Berlin, 2007.

Санкт-Петербургский государственный университет, 14-ая линия Васильевского острова, дом 29, 199178, Российская Федерация
Email address: efominykh@gmail.com