Задачи по аналитической геометрии

I. Векторная алгебра

I.1. Скалярное, векторное и смешанное произведение

1. Длины векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равны 1, скалярное произведение $(\bar{a}+\bar{b}, -2\bar{a}+3\bar{b}) = \frac{3}{2}$. Найти скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

2. Длина вектора $\bar{a}$ равна 1, длина вектора $\bar{b}$ равна 2, а скалярное произведение $(2\bar{a}+\bar{b}, -2\bar{a}+3\bar{b}) = 14$. Найти скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

3. Длина вектора $\bar{a}$ равна 3, длина вектора $\bar{b}$ равна 2. Найти скалярное произведение $(\bar{a}+\bar{b}, \bar{a}-\bar{b})$.

4. Длина вектора $\bar{b}$ равна 1, скалярное произведение $(\bar{a}+\bar{b}, \bar{a}-\bar{b})$ равно 12, а скалярное произведение $(\bar{a}, \bar{b})$ равно 3. Найти косинус угла между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

5. Найти угол между векторами $\bar{a} = \{2, -2, 1\}$ и $\bar{b} = \{1, 1, 1\}$.

6. Найти углы параллелограмма ABCD, если известно, что $A = (0, 1, 2)$, $B = (2, 3, 5)$, $D = (1, 2, 3)$.

7. Найти длины сторон треугольника ABC, если известно, что $A(1, -1, 2)$, $B(2, 0, 3)$, $C(3, 1, 3)$.

8. Найти координаты проекции вектора $\{2, 2, 1\}$ на плоскость $x - y + z + 5 = 0$.

9. Найти координаты проекции точки $A(1, 2)$ на прямую $x + y - 1 = 0$.

10. Найти координаты проекции точки $A(2, -3)$ на прямую $x - 2y - 1 = 0$.

11. Векторное произведение $[\bar{a}-2\bar{b}, 3\bar{a}+\bar{b}]$ равно 18. Найти векторное произведение $[\bar{a}, \bar{b}]$.

12. Площадь параллелограмма, натянутого на вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$, равна 2. Найти площадь параллелограмма, натянутого на вектора $\bar{a} - 2\bar{b}$ и $3\bar{a} + \bar{b}$.

13. Найти площадь параллелограмма $ABCD$, если точки A, B, C имеют координаты $A(1, 1, 0)$, $B(4, 3, 4)$, $C(3, 3, -1)$.

14. Даны вектора $\bar{a} = \{8, 4, 1\}$ и $\bar{b} = \{2, 2, -1\}$. Найти вектор $\bar{c}$ длины 2, перпендикулярный векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$ и направленный так, чтобы вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ образовывали левую тройку.

15. Найти нормаль к плоскости, проходящей через точки $A(4, 3, 1)$, $B(5, 5, 1)$, $C(4, 4, 0)$.

16. Найти площадь треугольника, вершины которого находятся в точках $A(-1, 0, -1)$, $B(0, 2, -3)$, $C(0, 2, -1)$.

17. Найти объем параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$, если его вершины имеют координаты $A(4, 4, 1)$, $B(4, 5, 2)$, $D(3, 2, 1)$, $A'(5, 5, 2)$.

18. Какую ориентацию имеет тройка векторов $\bar{a} = \{1, 1, 1\}$, $\bar{b} = \{8, 4, 1\}$, $\bar{c} = \{2, 2, 1\}$?

19. Компланарны ли вектора $\bar{a} = \{1, 1, 1\}$, $\bar{b} = \{-1, 1, 3\}$, $\bar{c} = \{3, 2, 1\}$?

20. Найти высоту параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$, опущенную на грань $ABCD$, если его вершины имеют координаты $A(3, 1, 3)$, $B(4, 3, 4)$, $D(1, 0, 2)$, $A'(4, 2, 5)$.

21. Найти объем тетраэдра $ABCD$, если его вершины имеют координаты $A(4, 1, 2)$, $B(5, 3, 3)$, $C(2, 0, 1)$, $D(5, 2, 4)$.

22. Даны вектора $\bar{a} = \{8, 4, 1\}$ и $\bar{b} = \{2, 2, -1\}$. Найти объем параллелепипеда, натянутого на вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$, $[\bar{a}, \bar{b}]$.

I.2. Прямые на плоскости

23. Даны точки $A(1,2)$, $B(3,4)$. Найти общее уравнение прямой, проходящей через середину отрезка AB перпендикулярно этому отрезку.

24. Даны точки $A(2,1)$, $B(4,5)$. Найти параметрическое уравнение прямой, проходящей через середину отрезка AB перпендикулярно этому отрезку.

25. Написать параметрическое уравнение прямой $4x+y-5=0$.

26. Принадлежит ли точка $(1,-1)$ прямой

$$\begin{cases} x=-t \\ y=1+5t \end{cases} ?$$

27. Написать общее уравнение прямой

$$\begin{cases} x &= 5t-1 \\ y &= 3. \end{cases}$$

28. Написать общее и параметрическое уравнение прямой, проходящей через точки (1,2) и (4,-5).

29. Найти точку пересечения высот треугольника ABC, вершины которого имеют координаты $A(1,1)$, $B(3,2)$ и $C(1,-2)$.

30. Стороны треугольника имеют уравнения $2x-5y+5=0$, $x-y-2=0$ и $x-4y+4=0$. Найти уравнения всех медиан.

31. Найти уравнение прямой, перпендикулярной прямой $4x-y-1=0$ и проходящей через точку $(1,1)$.

32. Установить взаимное расположение прямых $3x-y+5=0$ и $6x-2y+1=0$.

33. Написать уравнения прямых, пересекающих прямую $2x+3y-5=0$ под углом 45 градусов и проходящих через точку (1,2).

34. Найти угол между прямыми $x-y+3=0$ и $2x-3y+1=0$.

35. Найти расстояние от точки $(1,2)$ до прямой $-x+3y+3=0$.

36. Найти расстояние между прямыми $-x+3y-1=0$ и $2x-6y-5=0$.

37. Написать уравнения биссектрис углов между прямыми $x+2y-1=0$ и $2x+3y+2=0$.

38. Написать уравнения касательных к окружности с центром в точке (0,1) радиуса 1, параллельных прямой $5x+3y-15=0$.

39. Найти точку, симметричную точке $O(0,0)$ относительно прямой $5x+3y-15=0$.

40. Стороны AB и AC треугольника ABC имеют уравнения $2x+y=0$ и $3x+5y+7=0$ соответственно. Найти координаты всех вершин треугольника, зная, что основание высоты, опущенной из вершины A, имеет координаты $(3,1)$.

I.3. Плоскости

41. Даны точки $A(1,2,1)$ и $B(3,2,3)$. Написать уравнение плоскости, проходящей через середину отрезка AB перпндикулярно этому отрезку.

42. Найти общее уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2,4,3)$, $B(3,6,4)$, $C(1,1,2)$.

43. Найти параметрическое уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2,4,3)$, $B(2,5,4)$, $C(1,2,3)$.

44. Написать параметрическое уравнение плоскости $3x + 4y + z - 8 = 0$.

45. Найти высоту параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$, опущенную на грань $BCC'B'$, если точка A имеет координаты $A(0, 1, 2)$, а грань $BCC'B'$ содержится в плоскости $x + y + z + 1 = 0$.

46. Дана плоскость $x-y+z-1 = 0$. Найти уравнение плоскости, перпендикулярной данной и проходящей через точки $(1, 1, 0)$ и $(0, 1, 2)$.

47. Найти угол между плоскостями $4x - y - z = 0$ и $x + 5y + 2z + 1 = 0$.

48. Найти координаты проекции вектора $\{-1, 3, 0\}$ на плоскость $2x-3y+z-1 = 0$.

49. Найти расстояние между плоскостями $3x-2y-3z+5 = 0$ и $9x-6y-9z-5 = 0$.

50. Найти расстояние между плоскостями $x = 1 + u + v$, $y = 2 + u$, $z = 3 + u - v$ и $x = 1 + 4u$, $y = 3u + v$, $z = 4 + 2u + 2v$.

I.4. Прямые в пространстве

51. Написать параметрическое уравнение прямой, проходящей через точки $(1, 1, 1)$ и $(1, 2, 3)$.

52. Дана прямая

$$\begin{cases} x &= 5t - 1 \\ y &= 3t - 1 \\ z &= t - 1. \end{cases}$$

Написать параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку $(1, 1, 1)$ параллельно данной.

53. Написать каноническое уравнение прямой, проходящей через точки $(1, 2, 3)$ и $(1, -1, 2)$.

54. Написать каноническое уравнение прямой, перпендикулярной плоскости $x + y - 1 = 0$ и проходящей через точку $(1, 1, 1)$.

55. Найти расстояние между параллельными прямыми $x = 2 + 4t$, $y = -6t$, $z = -1 - 8t$ и $x = 7 - 6t$, $y = 2 + 9t$, $z = 12t$.

56. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми $x = 1 + 2t$, $y = 2 - 2t$, $z = -t$ и $x = -2t$, $y = -5 + 3t$, $z = 4$.

57. Найти угол между прямыми $x = 1 + 2t$, $y = 7 + t$, $z = 3 + 4t$ и $x = 6 + 3t$, $y = -1 - 2t$, $z = -2 + t$.

58. Найти расстояние от точки $(1, 2, 4)$ до прямой $x = t$, $y = 1 - 2t$, $z = 3 + t$.

59. Написать параметрическое уравнение прямой

$$\begin{cases} 2x - 3y - 3z - 9 = 0 \\ x - 2y + z + 3 = 0. \end{cases}$$

60. Написать уравнение множества точек, равноудаленных от скрещивающихся прямых $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{-1}$ и $\frac{x}{-2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z-4}{0}$.

61. Написать уравнение множества точек, равноудаленных от параллельных прямых $\frac{x-2}{4} = \frac{y}{-6} = \frac{z+1}{-8}$ и $\frac{x-7}{-6} = \frac{y-2}{9} = \frac{z}{12}$.

62. Найти уравнение высоты треугольника ABC, опущенной из вершины B, если вершины треугольника расположены в точках $A(1, -1, 0)$, $B(1, 2, -1)$, $C(2, -3, 2)$.

63. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямые $x = t$, $y = -8 - 4t$, $z = -3 - 3t$ и $x = -1 + t$, $y = 4 - 4t$, $z = 3 - 3t$.

64. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямые $x = -2 + 3t$, $y = -1$, $z = 4 - t$ и $x = t + 12$, $y = t + 1$, $z = 2t + 4$.

65. Лежит ли прямая $x = t$, $y = t + 1$, $z = -2t + 1$ в плоскости $x + y + z = 0$?

66. Найти угол между прямой $\frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}$ и плоскостью $3x + 5y - z - 2 = 0$.

67. Найти уравнение проекции прямой $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{3}$ на плоскость $3x-3y+2z-5 = 0$.

68. Найти уравнение медианы треугольника ABC, проведенной из вершины A, если стороны AB и AC имеют уравнения $\frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-3}{4}$ и $\frac{x-6}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{1}$ соответственно, а сторона BC лежит в плоскости $x + y + z = 0$.

69. Найти уравнение высоты треугольника ABC, опущенной из вершины A, если стороны AB и AC имеют уравнения $\frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-4}{-1}$ и $\frac{x-11}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$ соответственно, а сторона BC лежит в плоскости $x + 2y + z - 1 = 0$.

70. Найти уравнение биссектрисы треугольника ABC, опущенной из вершины A, если стороны AB и AC имеют уравнения $\frac{x+3}{-1} = \frac{y}{4} = \frac{z-4}{1}$ и $\frac{x-9}{-4} = \frac{y-6}{-2} = \frac{z-1}{1}$ соответственно, а сторона BC лежит в плоскости $x + y + z = 0$.

II. Кривые второго порядка

71. Написать уравнение эллипса, оси которого параллельны осям координат и который касается осей Ox и Oy в точках $(4, 0)$ и $(0, 1)$ соответственно.

72. Найти точки пересечения с осями координат эллипса, большая полуось которого равна 4, малая полуось равна 3, центр находится в точке (3,2), а оси параллельны осям координат.

73. Написать уравнение эллипса, фокусы которого лежат на прямой $x + y = 0$, центр совпадает с началом координат, а большая и малая полуоси равны 3 и 2 соответственно.

74. Написать уравнение эллипса, фокусы которого расположены в точках $(3, 3)$ и $(-1, -1)$, а большая полуось равна 3.

75. Написать уравнение эллипса с фокусами $(-4, 0)$ и $(4, 0)$, проходящего через точку $(-3, -\sqrt{15})$.

76. Написать уравнение гиперболы, проходящей через точку $(1, 0)$, асимптотами которой являются прямые $x = 0$, $y = 1$.

77. Написать уравнение гиперболы с фокусами $(-2, 0)$ и $(2, 0)$, проходящей через точку $(-\sqrt{5}, 2)$.

78. Написать уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на прямой $x - y = 0$, центр совпадает с началом координат, а полуоси равны 2.

79. Найти фокусы и директрису параболы $x^2 - y + 2 = 0$.

80. Написать уравнение параболы с фокусом $(3, 0)$ и директрисой $x = -1$.

81. Определить тип и расположение линии $x^2 - y^2 - 4x + 2y + 2 = 0$.

82. Определить тип и расположение линии $x^2 - y^2 - 3x + 5y - 4 = 0$.

83. Определить тип и расположение линии $25x^2 + 9y^2 - 100x + 54y - 44 = 0$.

84. Определить тип и расположение линии $4x^2 - y^2 - 16x + 6y + 23 = 0$.

85. Определить тип и расположение линии $3x^2 + 12x + 16y - 12 = 0$.

86. Привести кривую к каноническому виду $2x^2 + 4xy + 5y^2 - 4x - 16y + 5 = 0$.

87. Привести кривую к каноническому виду $2x^2 + 4xy - 5y^2 - 4x - 18y - 5 = 0$.

88. Привести кривую к каноническому виду $4x^2 - 4xy + y^2 + 3y - 1 = 0$.

89. Привести кривую к каноническому виду $5x^2 - 4xy + 2y^2 + 2x - 4y + 5 = 0$.

90. Привести кривую к каноническому виду $x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$.

III. Поверхности второго порядка

91. Определить координаты центра и найти радиус сферы $x^2 + y^2 + z^2 - 12x + 4y - 6z = 0$.

92. Написать уравнение круглого цилиндра, проходящего через точку $(1, 2, -2)$, осью которого служит прямая $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{2}$.

93. Написать уравнение поверхности круглого конуса, вершина которого находится в точке $(1, 1, 1)$, направляющий вектор оси $\{2, -2, -1\}$, а угол образующих конуса с осью равен $\frac{\pi}{4}$.

94. Определить аффинный тип линии пересечения параболоида $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 2z$ и плоскости $2x - 3y + 6 = 0$.

95. Определить аффинный тип линии пересечения гиперболоида $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ и плоскости $x + y + z = 0$.

96. Определить вид и расположение поверхности $x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 6x + 8y - 36z = 0$.

97. Определить вид и расположение поверхности $4x^2 - y^2 - z^2 + 32x - 12z + 44 = 0$.

98. Определить вид и расположение поверхности $3x^2 - y^2 + 3z^2 - 18x + 10y + 12z + 14 = 0$.

99. Определить вид и расположение поверхности $6y^2 + 6z^2 + 5x + 6y + 30z - 11 = 0$.

100. Определить вид и расположение поверхности $4x^2 + y^2 - 4xy - 36 = 0$.

101. Написать каноническое уравнение поверхности и найти каноническую систему координат: $4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xy + 4yz - 8xz - 28x + 2y + 16z + 45 = 0$.

102. Написать каноническое уравнение поверхности и найти каноническую систему координат: $2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy - 4xz + 2yz + 2x - 10y - 2z - 1 = 0$.

103. Написать каноническое уравнение поверхности и найти каноническую систему координат: $7x^2 + 7y^2 + 16z^2 - 10xy - 8yz - 8xz - 16x - 16y - 8z + 72 = 0$.

104. Написать каноническое уравнение поверхности и найти каноническую систему координат: $4x^2 + 4y^2 - 8z^2 - 10xy + 4yz + 4xz - 16x - 16y + 10z - 2 = 0$.

105. Написать каноническое уравнение поверхности и найти каноническую систему координат: $2x^2 - 7y^2 - 4z^2 + 4xy + 20yz - 16xz + 60x - 12y + 12z - 90 = 0$.

106. Написать каноническое уравнение поверхности и найти каноническую систему координат: $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6x - 24y + 18z + 30 = 0$.

107. Написать каноническое уравнение поверхности и найти каноническую систему координат: $2x^2 + 2y^2 - 5z^2 + 2xy - 2x - 4y - 4z + 2 = 0$.

108. Написать каноническое уравнение поверхности и найти каноническую систему координат: $2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 2yz + 2xz - 4x + 6y - 2z + 3 = 0$.

109. Написать каноническое уравнение поверхности и найти каноническую систему координат: $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 6xz - 2x + 6y + 2z = 0$.

110. Написать каноническое уравнение поверхности и найти каноническую систему координат: $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 10xz + 2x + 4y - 10z - 1 = 0$.

111. Написать каноническое уравнение поверхности и найти каноническую систему координат: $2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy + 2yz + 4x + 4z = 0$.