Лекции по дифференциальной геометрии
и топологии

С.В. Матвеев

Лекция 1. Кривизна кривой

Все объекты в математике относятся к одному из двух классов: множества и отображения. На плоскую кривую можно смотреть двумя способами - как на подмножество плоскости и как на отображение. Мы предпочитаем вторую точку зрения и будем рассматривать в основном параметризованные кривые.

Определение. Плоской параметризованной кривой называется произвольное бесконечно-дифференцируемое отображение сегмента числовой оси в плоскость.

Ясно, что кривые бывают искривлены в большей или меньшей степени. Поставим себе задачу - найти (нестрого) *кривизну* плоской кривой как функцию точки на кривой.

1. Из общих соображений, кривизна должна удовлетворять следующим условиям:

1. не зависеть от параметризации кривой
2. сохраняться при движениях кривой;
3. зависеть только от поведения кривой в окрестности данной точки;
4. кривизна прямой должна быть равна нулю;
5. (нормировка) кривизна единичной окружности во всех точках должна быть равна 1.

Из этих условий, с привлечением более-менее разумных других допущений, следует, что кривизна кривой $y = f(x)$ должна задаваться формулой

$$k(x) = |\frac{y''}{(1+(y')^2)^{3/2}}|$$

2. Для параметрически заданной кривой $x = x(t), y = y(t)$ эта формула превращается в формулу

$$k(t) = |\frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}+\dot{y})^{3/2}}|.$$

3. При движении точки по кривой с единичной скоростью (такая параметризация называется натуральной) вектор скорости поворачивается с некоторой угловой скоростью. Ясно, что эта скорость служит характеристикой искривленности кривой. Нетрудно показать, что для кривой $\bar{r} = \bar{r}(s)$, где s -натуральный параметр, т.е. $|\vec{r}_s'| = 1$, угловая скорость задается формулой

$$k(s) = |\vec{r}''|.$$

Это дает тот же результат, что и формула из п.2, и имеет ясный физический смысл: кривизна совпадает с модулем вектора ускорения при движении точки по кривой с единичной скоростью.

4. Задача об отыскании окружности, которая имеет с кривой в данной точке касание второго порядка, имеет единственное решение (в случае *регулярной* кривой, вектор скорости которой не обращается в 0). Нетрудно показать, что радиус этой окружности обратен ее кривизне в смысле пунктов 1-3.

Итак, во всех четырех случаях мы приходим к одному и тому же ответу. Любой из пунктов 1-4 может служить основой для определения кривизны.

5. Определения, сформулированные на основе пунктов 2-4, допускают обобщение на случай пространственных кривых.

Определение. Кривизна пространственной кривой $\bar{r} = \bar{r}(t)$, где $\bar{r}(t) = (\bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{z}(t))$, задается формулой $k = \frac{|[\dot{\bar{r}}, \ddot{\bar{r}}]|}{|\dot{\bar{r}}|^3}$.

Нетрудно проверить, что так определенная кривизна не зависит от параметризации, сохраняется при движениях, носит локальный характер и в случае плоских кривых совпадает с ранее полученными формулами.

Лекция 2. Кручение кривой и формулы Френе

1. Кручение. Определение. Кривая в R^3 называется *бирегулярной*, если векторы $\bar{r}'$ и $\bar{r}''$ для какой-нибудь (и тогда любой) ее параметризации независимы во всех точках кривой.

Определение. Плоскость, содержащая вектора $\bar{r}'$ и $\bar{r}''$, называется *соприкасающейся* плоскостью.

Нетрудно проверить, что она не зависит от параметризации.

Определение. Угловая скорость κ вращения соприкасающейся плоскости при движении точки по кривой с единичной скоростью называется *кручением* кривой.

Теорема. Для натурального параметра s кручение задается формулой

$$\kappa = \frac{< \bar{r}', \bar{r}'', \bar{r}''' >}{k^2},$$

где k - кривизна.

Доказательство. Угловая скорость κ вращения соприкасающейся плоскости равна модулю производной ее единичной нормали

$$\bar{n} = \frac{[\bar{r}', \bar{r}'']}{k}.$$

Вычисляя производную, получаем:

$$\bar{n}' = \frac{[\bar{r}', \bar{r}''']k - k'[\bar{r}', \bar{r}'']}{k^2}.$$

Так как $\bar{n}' \perp \bar{n}$ и $\bar{n}' \perp \bar{\tau}$, где $\bar{\tau} = \bar{r}'$ единичный касательный вектор, то $\bar{n}' || \bar{r}''$, а тогда скалярное домножение обеих частей предыдущей формулы на $\bar{r}''$ дает искомую формулу для κ.

Формула

$$\kappa = \frac{< \bar{r}', \bar{r}'', \bar{r}''' >}{|[\bar{r}', \bar{r}'']|^2}$$

для произвольной параметризации сразу следует из предыдущей.

2. Формулы Френе.

Мы изложим соответствующую теорию сразу для пространства R^n .

Определение. i-мерной соприкасающейся плоскостью кривой $\bar{r} = \bar{r}(t)$ называется линейное подпространство, натянутое на векторы $\bar{r}', \bar{r}'', \ldots$ (Мы предполагаем, что кривая i-регулярна, т.е. что эти векторы независимы при $i \leq n$).

Выберем в этой плоскости ортонормированный базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ так, чтобы для любого i плоскость, натянутая на первые i векторов, совпадала с соприкасающейся. Дополнительно потребуем, чтобы коэффициент при e_i разложения вектора $\bar{r}^i$ по базису $e_1, e_2, \ldots, e_i$ был всегда положителен. Этот базис называется базисом (или реперо́м) Френе.

Система уравнений Френе показывает, как этот базис меняется при движении точки по кривой:

$e_i' = \Sigma_j a_{ij} e_j, 1 \leq i, j \leq n.$

Дифференцируя равенство $(e_i, e_j) = 0$, получаем, что $a_{ij} = -a_{ji}$. Из определения соприкасающейся плоскости следует, что $a_{ij} = 0$ при $j > i + 1$. Поэтому матрица (a_{ij}) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_3 & 0 \\ .. & .. & .. & .. & k_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & -k_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Числа k_i называются первой, второй и т.д. кривизнами кривой. В случае размерности 3 k_1 - это введенная ранее кривизна; число k_2 называется *кручением* кривой.

Теорема. *Для любых гладких неотрицательных функций $k_i(s), 1 \leq i \leq n-1$ существует единственная с точностью до конгруэнтности гладкая кривая, для которой эти функции служат кривизнами соответствующих порядков.*

Доказательство этой теоремы получается применением теоремы о существовании и единственности решения системы дифференциальных уравнений первого порядка к системе уравнений Френе.

Лекция 3. Сведения из теории гладких отображений.

Гладкое отображение $f : R^n \to R^m$ задается набором гладких функций $y_i = \varphi_i(x_1, \dots x_n), 1 \le i \le m$.

Матрица $\frac{\partial y_i}{\partial x_j}$ называется матрицей Якоби отображения f. Точка называется *неособой*, если ранг матрицы Якоби в этой точки принимает максимальной значение (т.е. n, если $n \le m$, и m, если $m \le n$). В случае $m = n$ определитель матрицы Якоби называется *якобианом* отображения.

Определение. Отображение $f : Q_1 \to Q_2$, где Q_1, Q_2 - области в R^n , называется *диффеоморфизмом*, если оно является биекцией, причем оба отображения f, f^{-1} -гладкие.

Заметим, что диффеоморфизм не имеет особых точек.

Определение. Два отображения $f_1 : R^n \to R^m$ и $f_2 : R^n \to R^m$ называется *эквивалентными*, если существуют такие диффеоморфизмы $\varphi_1 : R^n \to R^n$ и $\varphi_2 : R^m \to R^m$, что $\varphi_2 f_1 = f_2 \varphi_1$.

Эквивалентность отображений означает их совпадение с точностью до выбора системы координат. Локальная эквивалентность отображений определяется аналогично. Задача локальной классификации устойчивых особенностей гладких отображений является предметом теории катастроф.

Лекция 4. Первая квадратичная форма поверхности.

Теорема. *(об обратной функции) Гладкое отображение областей одинаковой размерности в окрестности неособой точки эквивалентно тождеству.*

Другими словами, ограничение гладкого отображения областей одинаковой размерности на некоторую окрестность неособой точки является диффеоморфизмом.

Теорема. *(о выпрямлении отображения). Гладкое отображение $f : R^n \to R^m$ при $n \ge m$ в окрестности неособой точки эквивалентно стандартной проекции, при $n \le m$ - стандартному вложению.*

Эта теорема вытекает из теоремы об обратной функции, которая, в свою очередь, является ее частным случаем.

Определение. Подмножество пространства R^3 называется поверхностью, если с точностью до диффеоморфизма оно локально устроено как плоскость в R^3 .

Определение. Поверхностью в R^3 называется гладкое отображение области на плоскости в R^3 , не имеющее особых точек.

Эти два определения отражают тот факт, что поверхность имеет двойственную природу - на нее можно смотреть как на **подмножество** и как на **отображение**.

Из теоремы о выпрямлении отображения вытекает, что эти определения описывают сходные объекты - по крайней мере, локально. Из этой же теоремы следует, что если градиент функции $F(x, y, z)$ во всех точках отличен от нуля, то уравнение $F(x, y, z) = 0$ задает поверхность.

Обычно отображение, задающее поверхность, записывается в виде $r = r(u, v)$, где u, v пробегают некоторую область на плоскости, а $r(u, v)$ - трехмерный вектор. Вектора r_u и r_v касаются поверхности, поэтому вектор $[r_u, r_v]$ нормален ей. Если поверхность задана в виде $F(x, y, z) = 0$, то в качестве нормали к поверхности можно взять градиент функции $F(x, y, z)$.

Определение. Форма

$$I(du,dv) = E(u,v)du^2 + 2F(u,v)dudv + G(u,v)dv^2$$

,где $E(u,v) = (r_u, r_u), F(u,v) = (r_u, r_v)$ и $G(u,v) = (r_v, r_v)$, а du, dv - координаты вектора на плоскости с началом в точке (u,v), называется **первой квадратичной формой поверхности**.

Фактически, первая квадратичная форма представляет собой ограничение на касательную плоскость стандартного скалярного произведения в пространстве.

Знание первой квадратичной формы позволяет вычислять длины кривых на поверхности, площади и углы между кривыми по формулам:

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2)}dt$$

$$S = \int\int_Q \sqrt{EG - F^2}dudv$$

$$\alpha = \frac{Edu_1du_2 + F(du_1dv_2 + du_2dv_1) + Gdv_1dv_2}{\sqrt{(Edu_1^2 + 2Fdu_1dv_1 + Gdv_1^2)}\sqrt{(Edu_2^2 + 2Fdu_2dv_2 + Gdv_2^2)}}$$

.

Лекция 5. Вторая квадратичная форма поверхности.

Определение. Вторая квадратичная форма поверхности $r = r(u,v)$ имеет вид $II(du,dv) = -(dr,dn) = (d^2r, n) = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$, где $L = (r_{uu}, n), M = (r_{uv}, n), N = (r_{vv}, n)$.

Используя разложение векторной функции $r = r(u,v)$ в ряд Тейлора, можно выяснить геометрический смысл второй квадратичной формы: она равна удвоенной квадратичной части отклонения поверхности от ее касательной плоскости.

Оказывается, вторая квадратичная форма тесно связана с кривизнами кривых на поверхности.

Пусть поверхность задана параметрически уравнением $r = r(u,v)$, и пусть уравнения $u = u(s), v = v(s)$ - натурально параметризованная кривая на ней. Обозначим через γ единичный вектор, нормальный перпендикулярным векторам r_s и n. Так как вектор r_{ss} перпендикулярен вектору r_s, то он раскладывается по векторам n и γ: $r_{ss} = k_n n + k_g \gamma$.

Определение. Коэффициент k_n называется *нормальной кривизной* кривой, коэффициент k_g - *геодезической кривизной* данной кривой.

Если через φ обозначить угол между векторами r_{ss} и n, то справедливы соотношения $k^2 = k_n^2 + k_g^2, k_n = k\cos\varphi, k_g = k\sin\varphi$.

Из определения второй квадратичной формы следует, что нормальная кривизна кривой равна значению второй квадратичной формы на единичном касательном векторе кривой.

Исследуем теперь вопрос, как меняется нормальная кривизна в зависимости от направления ее вектора скорости. Как и для всякой квадратичной формы, для второй квадратичной формы найдется ортонормированный базис в касательной плоскости, в котором форма имеет диагональный вид:
$II(du,dv) = \lambda_1 du^2 + \lambda_2 dv^2$

Направления, задаваемые векторами этого базиса, называются *главными направлениями,* числа λ_1, λ_2 - *главными кривизнами.*

Произведение $K = \lambda_1\lambda_2$ называется *гауссовой или полной кривизной*

поверхности в данной точке, полусумма $(\lambda_1+\lambda_2)/2$ - *средней кривизной*.

Знание главных кривизн и главных направлений позволяет найти нормальную кривизну в произвольном направлении:

$k_n = \lambda_1 \cos^2\varphi + \lambda_2 \sin^2\varphi,$

где φ - угол между данным направлением и направлением первого базисного вектора (Формула Эйлера). Так как

$\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi = \int_0^{2\pi}\sin^2\varphi d\varphi = 2\pi,$

то средняя кривизна есть интегральное среднее от нормальной кривизны по всем направлениям.

Из формулы Эйлера следует экстремальное свойство главных направлений: это те направления, где нормальная кривизна принимает наибольшее или наименьшее значение. Это свойство помогает находить главные направления:

вектор с координатами du, dv задает главное направление, если выполнено условие

$$(Edu+Fdv)(Mdu+Ndv)-(Ldu+Mdv)(Mdu+Ndv)=0.$$

Главные кривизны ищутся из условия

$$det(II-\lambda I)=0,$$

т.е. из уравнения $(L-\lambda E)(N-\lambda G)-(M-\lambda F)^2=0.$

Лекция 6. Деривационные формулы.

Каждой точке параметризованной поверхности отвечает репер r_u, r_v, n. Аналогично формулам Френе для кривой, деривационные формулы выражают производные векторов этого репера через них же.

$$\begin{aligned}
r_{uu} &= \Gamma^1_{11} r_u + \Gamma^2_{11} r_v + \lambda_1 n\\
r_{uv} &= \Gamma^1_{12} r_u + \Gamma^2_{12} r_v + \lambda_2 n\\
r_{vv} &= \Gamma^1_{22} r_u + \Gamma^2_{22} r_v + \lambda_3 n\\
n_u &= \alpha_{11} r_u + \alpha_{12} r_v + \alpha_{13} n\\
n_v &= \alpha_{21} r_u + \alpha_{22} r_v + \alpha_{23} n
\end{aligned}$$

Коэффициенты разложений можно найти с помощью умножения обеих частей каждого из равенств на вектора r_u, r_v, n и решения получающихся систем. При этом нужно учесть, что скалярные произведения вторых производных вектора r на первые производные выражаются через коэффициенты первой квадратичной формы, например:

$(r_{uv}, r_u) = E_v/2,$

$(r_{uu}, r_v) = (r_u, r_v)_u - (r_u, r_{uv}) = F_u - E_v/2.$

Оказывается, что $\lambda_1 = L, \lambda_2 = M, \lambda_3 = N$, коэффициенты α_{13} и α_{23} равны нулю, остальные коэффициенты α выражаются через коэффициенты первой и второй квадратичной формы.

Принципиальное значение имеет тот факт, что коэффициенты Γ^k_{ij} выражаются через коэффициенты первой квадратичной формы и их производные.

Поставим вопрос: для любых ли двух квадратичных форм

$Edu^2+2Fdudv+Gdv^2,\ Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2,$

где первая форма положительно определена, существует поверхность с данными формами? Этот вопрос естественен в связи со справедливостью аналогичного факта в тории кривых – существованием кривой с данными кривизной и кручением.

Оказывается, ответ на него отрицателен. Необходимые соотношения на коэффициенты форм получаются из равенств $r_{uuv} = r_{uvu}, r_{vvu} = r_{vuv}, n_{uv} = n_{vu}$ их скалярными умножениями на вектора r_u, r_v, n.

В частности, из равенства $(r_{uvu}, r_v) = (r_{uuv}, r_v)$ следует, что гауссова кривизна поверхности $K = (LN - M^2)/(EG - F^2)$ выражается через коэффициенты первой квадратичной формы и их производные.

Определение. Две поверхности называются *изометричными* (или *изгибаемыми* одна в другую), если в некоторых параметризациях их первые квадратичные формы совпадают.

Все характеристики поверхности, которые выражаются только через коэффициенты первой квадратичной формы, сохраняются при изгибании. Говорят, что такие характеристики относятся к *внутренней геометрии поверхности*. Например, таковыми являются длины кривых, углы между пересекающимися кривыми, площади, гауссова кривизна.

Если же коэффициенты форм удовлетворяют указанным необходимым условиям, то поверхность с такими формами существует и единственна с точностью до движения. Это доказывается так же, как и в случае кривых, нужно только использовать теорему существования и единственности системы дифференциальных уравнений в частных производных (при выполнении необходимых равенств смешанных производных) вместо аналогичной теоремы для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Лекция 7. Геодезические.

Определение. Кривая на поверхности называется *геодезической*, если в каждой ее точке вектор ускорения ортогонален поверхности.

Из определения геодезической вытекает, что движение по ней происходит с постоянной скоростью. Выведем уравнения геодезических.

Пусть $u = u(t), v = v(t)$ - геодезическая на поверхности $r = r(u, v)$. Имеем:

$$\dot{r} = r_u\dot{u} + r_v\dot{v},$$

$$\ddot{r} = r_{uu}\dot{u}^2 + 2r_{uv}\dot{u}\dot{v} + r_{vv}\dot{v}^2 + r_u\ddot{u} + r_v\ddot{v}.$$

Подставляя выражения вторых производных вектора r через первые и нормаль (по деривационным формулам), и приравнивая нулю коэффициенты при r_u и r_v, получаем следующие уравнения геодезических:

$$\ddot{u} + \Gamma^1_{11}\dot{u}^2 + 2\Gamma^1_{12}\dot{u}\dot{v} + \Gamma^1_{22}\dot{v}^2,$$

$$\ddot{v} + \Gamma^2_{11}\dot{u}^2 + 2\Gamma^2_{12}\dot{u}\dot{v} + \Gamma^2_{22}\dot{v}^2.$$

Отсюда следует, что *через каждую точку поверхности в данном направлении можно провести единственную геодезическую.* Другое следствие: так как коэффициенты Γ^k_{ij}, входящие в уравнение геодезических, зависят только от коэффициентов первой квадратичной формы и их производных, то *геодезические сохраняются при изгибании.*

Легко показать, что геодезические на плоскости являются прямыми. Поэтому геодезические на цилиндре (который разгибается в плоскость) - это винтовые линии.

Опишем, как ведут себя геодезические на произвольной поверхности вращения

$$r(s, \varphi) = (f(s)\cos\varphi, f(s)sin\varphi, h(s)),$$

где $y = f(s), z = h(s)$ - параметризованная натуральным параметром кривая на плоскости yz, которая вращается вокруг оси z.

Первая квадратичная форма для этой поверхности имеет вид $ds^2 + G\varphi^2$, где $G = f(s)^2$ (мы использовали здесь равенство $f'(s)^2 + h'(s)^2 = 1$, верное из-за натуральности параметра). Деривационные формулы

$$r_{ss} = \Gamma^1_{11} r_s + \Gamma^2_{11} r_\varphi + Ln$$
$$r_{s\varphi} = \Gamma^1_{12} r_s + \Gamma^2_{12} r_\varphi + Mn$$
$$r_{\varphi\varphi} = \Gamma^1_{22} r_s + \Gamma^2_{22} r_\varphi + Nn$$

в случае такой квадратичной формы существенно упрощаются:

$$r_{ss} = Ln$$
$$r_{s\varphi} = \frac{G_s}{2G} r_\varphi + Mn$$
$$r_{\varphi\varphi} = -\frac{G_s}{2} r_s + \frac{G_\varphi}{2G} r_\varphi + Nn,$$

или

$$r_{ss} = Ln$$
$$r_{s\varphi} = \frac{f'(s)}{f} r_\varphi + Mn$$
$$r_{\varphi\varphi} = -f'(s) f(s) r_s + Nn.$$

В этом случае уравнения геодезических принимают вид

$$\ddot{s} - f'(s) f(s) \dot{\varphi}^2 = 0$$

$$\ddot{\varphi} + 2\frac{f'(s)}{f} \dot{s}\dot{\varphi} = 0.$$

Частное решение: $\varphi = const, s$ - линейная функция - это означает, что меридиан всегда является геодезической. Параллель $s = const$ является геодезической тогда и только тогда, когда $f'(s) = 0$, т.е. когда касательная к кривой вертикальна.

Второе уравнение можно переписать в виде $(f(s)^2\dot{\varphi})'_t = 0$, откуда следует, что $f(s)^2\dot{\varphi} = const$. Чтобы понять геометрический смысл этого равенства, обозначим через ω угол между меридианом и геодезической.

Единичную скорость движения по геодезической можно разложить на составляющую вдоль параллели и составляющую вдоль меридиана. При этом составляющая вдоль параллели равна, с одной стороны $f(s)\dot{\varphi}$, а с другой стороны она равна $sin\omega$. Поэтому равенство $f(s)^2\dot{\varphi} = const$ превращается в равенство $f(s)sin\omega = const$.

Это позволяет качественно описать поведение геодезических на поверхности вращения. Например, на однополостном гиперболоиде вращения они могут вести себя так (в зависимости от начальной точки и начального направления): идти все время снизу строго вверх и уходить в бесконечность, идти все время снизу строго вверх, приближаясь к горловому сечению, идти снизу, отражаться от параллели и затем идти строго вниз.

Лекция 8. Полугеодезическая параметризация.

Полугеодезическая параметризация хороша тем, что в ней первая квадратичная форма имеет особенно простой вид $du^2 + G(u,v)dv^2$.

Теорема. *Каждая точка поверхности имеет окрестность, которая допускает полугеодезическую параметризацию.*

Доказательство. Проведем через данную точка две ортогональные геодезические, параметризованные натуральным параметром. Параметр на одной из из них назовем u, на второй - v. Через каждую точку геодезической с параметром v проведем ортогональную ей геодезическую линию. Получим семейство кривых. Рассмотрим также ортогональное ему семейство кривых. Искомая окрестность определяется тем, что через каждую ее точку должно проходить ровно по одной кривой каждого семейства, и эти кривые должны пересекать ось u и ось v, соответственно. Введем теперь координаты, сопоставляя каждой точке этой окрестности параметры u и v, отвечающие точкам пересечения проходящих через эту точку кривых семейств с соответствующими осями. Нетрудно проверить, что эта параметризация будет полугеодезической. Более того, будут выполнены равенства $G(0,v) \equiv 1, \quad G_u(0,v) \equiv 0$.

Теорема. *Если две точки достаточно близки друг другу, то соединяющая их геодезическая l имеет минимальную длину среди всех кривых, соединяющих эти точки.*

Для доказательства нужно ввести полугеодезическую параметризацию, в которой геодезическая l задается уравнением $v = 0$. Нужное неравенство для интегралов, выражающих длины геодезической l и любой другой соединяющей данные точки кривой становится очевидным.

Можно ли улучшить параметризацию так, чтобы и коэффициент G обратился в единицу? В общем случае нельзя, так как тогда гауссова кривизна поверхности была бы нулевой. Попробуем найти связь между коэффицентом G и гауссовой кривизной K.

В случае полугеодезической параметризации деривациоонные формулы

$$r_{uu} = \Gamma^1_{11} r_u + \Gamma^2_{11} r_v + Ln$$
$$r_{uv} = \Gamma^1_{12} r_u + \Gamma^2_{12} r_\varphi + Mn$$
$$r_{vv} = \Gamma^1_{22} r_u + \Gamma^2_{22} r_\varphi + Nn$$

существенно упрощаются:

$$r_{uu} = Ln$$
$$r_{uv} = \frac{G_u}{2G} r_\varphi + Mn$$
$$r_{vv} = -\frac{G_u}{2} r_u + \frac{G_\varphi}{2G} r_\varphi + Nn.$$

В этом случае, используя равенство $(r_{uuv}, r_v) = (r_{uvu}, r_v)$, нетрудно выразить гауссову кривизну K через G:

$$K = -\left(\frac{G_u}{2G}\right)_u - \left(\frac{G_u}{2G}\right)^2.$$

Прямая проверка показывает, что это равенство эквивалентно равенству

$$K = -\frac{(\sqrt{G})_{uu}}{\sqrt{G}}.$$

Мы получили дифференциальное уравнение

$$(\sqrt{G})_{uu} + K\sqrt{G} = 0.$$

Учитывая упомянутые выше условия $G(0,v) \equiv 1, \ G_u(0,v) \equiv 0$, можно заключить, что функция G выражается через функцию K. Поэтому *поверхности с одинаковой гауссовой кривизной локально изометричны.* В случае постоянной гауссовой кривизны это выражение можно найти явно.

Теорема. *Суммы углов геодезического треугольника равна*

$$\pi + \int\int_{\Delta} K d\sigma.$$

Достаточно доказать теорему для прямоугольного треугольника, катеты которого идут по осям полугеодезической системы координат. Прямое вычисление интеграла путем его сведения к повторному показывает, что

$$\int\int_{\Delta} K d\sigma = -\int_0^a \frac{G_u}{2\sqrt{G}} \dot{v} dt,$$

где натуральный параметр $t, 0 \leq t \leq a$, параметризует гипотенузу треугольника. Последний интеграл легко берется, так как подынтегральное выражение является производной функции $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\dot{v}\sqrt{G}}{\dot{u}}$.