Задачи по дискретной математике

Кораблёв Ф.Г., Казаков А.А.

1. Комбинаторика

1.1. Вычисление комбинаторных чисел

1.1. Вычислить с использованием рекуррентной формулы для чисел сочетаний:
1) C_5^3; 2) C_6^4; 3) C_7^3; 4) C_7^5.

1.2. Вычислить с использованием рекуррентной формулы для чисел Стирлинга второго рода:
1) S_4^3; 2) S_5^3; 3) S_6^4; 4) S_7^3.

1.3. Вычислить с использованием рекуррентной формулы для чисел Белла:
1) B_3; 2) B_4; 3) B_5; 4) B_6.

1.4. Вычислить с использованием рекуррентной формулы для чисел Каталана:
1) Q_4; 2) Q_5; 3) Q_6.

1.5. Вычислить с использованием явной формулы для чисел Стирлинга второго рода:
1) S_7^5; 2) S_8^5; 3) S_9^7.

1.6. Вычислить с использованием явной формулы для чисел Стирлинга первого рода:
1) D_5^3; 2) D_4^5; 3) D_3^6.

1.7. Вычислить с использованием явной формулы для чисел Каталана:
1) Q_6; 2) Q_7; 3) Q_8.

1.2. Числа сочетаний

1.8. Найти число подмножеств X множества $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ таких, что:
1) $|X| = 3$;
2) $|X| = 5$, $0 \in X$;
3) $|X| = 6$, $8 \notin X$;
4) $|X| = 7$, $\{3, 6\} \subset X$, $9 \notin X$;
5) $|X| \leqslant 5$.

1.9. Найти число подмножеств множества $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, состоящих из трёх чётных и двух нечётных чисел.

1.10. Сколько чисел от 0 до 999999, в которых нет рядом стоящих одинаковых цифр?

1.11. На окружности отмечено n точек. Точки соединяются всевозможными хордами. Известно, что никакие три из них не пересекаются в одной точке внутри круга. Найти:

1) число хорд;
2) число треугольников, образованных хордами;
3) число выпуклых четырёхугольников, образованных хордами;
4) число точек пересечения хорд внутри круга;
5) число треугольников, не имеющих общих точек с прямой, соединяющей точки с номерами $k, l \in \{1, \ldots, n\}$;
6) число треугольников, имеющих общие точки с прямой, соединяющей точки с номерами $k, l \in \{1, \ldots, n\}$;
7) количество частей, на которые хорды делят круг.

1.3. Разложения шаров по ящикам

1.12. Найти число способов разложить 6 одинаковых шаров по 4 одинаковым ящикам.

1.13. Найти число способов разложить 8 различных шаров по 5 одинаковым ящикам.

1.14. Найти число способов разложить 12 одинаковых шаров по 8 различным ящикам.

1.15. Найти число способов разложить 20 различных шаров по 4 различным ящикам так, чтобы в них лежало $4, 5, 8$ и 3 шара соответственно.

1.16. Найти число способов разложить 4 белых и 3 чёрных шара по 6 различным ящикам.

1.17. Найти число способов разложить 5 белых и 8 чёрных шаров по 12 различным ящикам при условии, что ни один ящик не должен быть пустым.

1.18. Найти число способов разложить 20 одинаковых шаров по 5 различным ящикам так, чтобы:

1) В каждом ящике оказалось не менее двух шаров;
2) В каждом ящике оказалось не более 5 шаров;

3) Оказалось не более двух пустых ящиков.

1.19. Найти число способов разложить 6 одинаковых шаров по 4 различным ящикам так, чтобы в каждом оказалось не более трёх шаров.

1.20. Найти коэффициент при x^{100} в многочлене $(1 + x + x^2 + \ldots + x^{100})^3$.

1.21. Найти коэффициент при x^{87} в многочлене $(1 + x + x^2 + \ldots + x^{90})^6$.

1.4. Числа Каталана

1.22. Найти число способов расставить скобки в произведении n множителей.

1.23. Путь Дика — путь на плоскости из точки $(0, 0)$ в точку $(2n, 0)$, составленный из векторов $(1, 1)$ и $(1, -1)$ и проходящий не ниже оси абсцисс. Найти число путей Дика для фиксированного n.

1.24. Найти число путей на плоскости из точки $(0, 0)$ в точку (n, n), составленных из векторов $(1, 0)$ и $(0, 1)$ и не проходящих выше прямой $y = x$.

1.25. На прямой отмечено $2n$ точек. Найти число способов, которыми можно попарно соединить эти точки непересекающимися дугами, лежащими в одной полуплоскости.

1.26. На окружности отмечено $2n$ точек. Найти число способов соединить все эти точки непересекающимися хордами.

1.27. Найти число способов разложить на плоскости пирамидки из одинаковых монет так, что в нижнем ряду n монет.

1.28. Найти число способов разрезать на треугольники выпуклый n-угольник диагоналями, не пересекающимися внутри этого n-угольника.

1.29. Найти число фигур со связной внутренностью с началом в точке $(0, 0)$, сторонами, составленными из векторов $(1, 0)$ и $(0, 1)$, и с периметром $2n$.

1.30. Таблица Юнга размера n — это матрица размера $2 \times n$, заполненная последовательностью чисел от 1 до $2n$ так, что в каждой строке и в каждом столбце числа возрастают. Найти число таблиц Юнга размера n.

1.31. Найти число неубывающих последовательностей натуральных чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, таких, что $a_i \leqslant i$, для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

1.32. Найти число последовательностей целых чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, таких, что $a_1 = 0$ и $0 \leqslant a_{i+1} \leqslant a_i + 1$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n - 1$.

1.33. Найти число возрастающих последовательностей натуральных чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, таких, что $a_i \leqslant 2i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

1.34. Найти число последовательностей целых чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, каждое из которых не меньше -1, таких, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_i \geqslant 0$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n-1$ и $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 0$.

1.35 (Перестановки Дональда Кнута)**.** Найти число перестановок n чисел, таких, что никакие три числа в перестановке не идут в порядке возрастания.

1.36. Непересекающиеся подмножества X, Y множества $\mathbb{N}$ называются зацепленными, если $\exists a, c \in X$ и $\exists b, d \in Y$, что $a < b < c < d$. Найти число разбиений множества $\{1, \ldots, n\}$ на попарно незацепленные множества.

1.5. Биномиальная и полиномиальная формулы

1.37. Доказать, что $\sum\limits_{k=0}^{n} 9^k C_n^k = 10^n$.

1.38. Найти коэффициент при x^k в многочленах:

1) $(x+2)^{10}$, $k = 3$;
2) $(1-2x)^7$, $k = 4$;
3) $(\sqrt{x} - \frac{2}{x})^8$, $k = 2$;
4) $(3\sqrt[3]{x^2} - x\sqrt{x})^9$, $k = 11$.

1.39. Найти коэффициент при x^{15} в многочлене $(1 + x + x^2)^{10}$.

1.40. Найти коэффициент при x^{20} в многочлене $(1 + x^2 + x^4)^6$.

1.6. Линейные рекуррентные соотношения

1.41. Найти формулу общего члена последовательности, заданной своим рекуррентным соотношением с начальными условиями:

1) $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $a_0 = 1$, $a_1 = 1$;
2) $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n$, $a_0 = 10$, $a_1 = 16$;
3) $a_{n+2} = 2\cos\alpha a_{n+1} - a_n$, $a_0 = 1$, $a_1 = \cos\alpha$;
4) $a_{n+3} = -3a_{n+2} - 3a_{n+1} - a_n$, $a_0 = a_1 = a_2 = 1$;
5) $a_{n+3} = 9a_{n+2} - 26a_{n+1} + 24a_n$, $a_0 = 1, a_1 = -3, a_2 = -29$;
6) $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$, $a_0 = 1, a_1 = -7$.

1.7. Производящие функции

1.42. Найти производящую функцию для следующих числовых последовательностей:

1) $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$;

2) $\frac{1}{1 \cdot 2}, \frac{1}{2 \cdot 3}, \ldots, \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)}, \ldots$;

3) $1, 2, 3, \ldots, n+1, \ldots$;

4) $1 \cdot 2, 2 \cdot 3, \ldots, (n+1) \cdot (n+2), \ldots$;

5) $1, 0, 1, 0, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$, где $\varepsilon_n = (n+1) \bmod 2$;

6) $1, 4, 9, 16, \ldots, (n+1)^2, \ldots$;

7) $f_0^2, f_1^2, \ldots, f_n^2, \ldots$, где $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$;

8) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16} \ldots, \frac{1}{(n+1)^2}, \ldots$.

1.43. Пусть $A(s)$ является производящей функцией для последовательности $\{a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$. Найти производящую функцию для следующих последовательностей:

1) $a_0 + a_1, a_1 + a_2, \ldots, a_n + a_{n+1}, \ldots$;

2) $a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \ldots, \sum\limits_{i=0}^{n} a_i, \ldots$;

3) $a_0, a_1 \cdot b, a_2 \cdot b^2, \ldots, a_n \cdot b^n, \ldots$, где $b \in \mathbb{R}$;

4) $a_0, a_2, a_4, \ldots, a_{2n}, \ldots$.

1.44. Пусть f_n обозначает n-ое число Фибоначчи, то есть такое число, что $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ и $f_0 = f_1 = 1$. Доказать, что:

1) $f_0 + f_1 + \ldots + f_n = f_{n+2} - 1$;

2) $f_0 + f_2 + \ldots + f_{2n} = f_{2n+1}$;

3) $f_1 + f_3 + \ldots + f_{2n-1} = f_{2n} - 1$;

4) $f_0^2 + f_1^2 + \ldots + f_n^2 = f_n \cdot f_{n+1}$.

1.45. С помощью производящих функций найти формулу общего члена последовательности, заданной своим рекуррентным соотношением с начальными условиями:

1) $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$, $a_0 = a_1 = 1$;

2) $a_{n+3} = \frac{3}{2}a_{n+2} - \frac{1}{2}a_n$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$;

3) $a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + 2a_n$, $a_0 = -1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$;

4) $a_{n+3} = -3a_{n+2} + a_{n+1} + 3a_n$, $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$.

1.46. Найти линейные рекуррентные соотношения, задающие числовые последовательности, имеющие следующие производящие функции:

1) $\dfrac{-3s+2}{(s-2)(s+1)}$;

2) $\dfrac{1}{(s-1)(s+1)}$;

3) $\dfrac{s+4}{s^2+s+2}$;

4) $\dfrac{s^2-4s-2}{s^3+4s^2-4}$;

5) $\dfrac{s^2+5s-4}{s^3-5s^2-4s-1}$;

6) $\dfrac{s(s-4)}{(s+3)(s^2+s-1)}$;

7) $\dfrac{s^2-3s+1}{(s-1)^2(s+1)}$;

8) $\dfrac{(s-1)(s+5)}{s^3-2s^2-2}$;

9) $\dfrac{s^2-3s-2}{(s+2)(s^2-s+1)}$.

2. Алгебра логики

2.1. Функции двузначной логии

2.1. Найти число различных функций алгебры логики от n переменных.

2.2. Построить таблицы всех функций двух переменных.

2.3. Найти число функций n переменных в P_2, принимающих на противоположных наборах одинаковые значения.

2.4. Найти число функций n переменных в P_2, которые на любой паре соседних наборов принимают различные значения. Указать их для случая двух переменных.

2.5. Построить таблицы для следующих функций:

1) Функция $f(x_1, x_2, x_3)$ определяется следующим образом: она равна 1 либо при $x_1 = 1$, либо если переменные x_2 и x_3 принимают разные значения, а значение переменной x_1 меньше значения переменной x_3. В противном случае функция обращается в нуль.

2) Функция $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ задаётся так: она равна нулю только на таких наборах $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, для которых справедливо неравенство $\alpha_1 + \alpha_2 > \alpha_3 + 2\alpha_4$.

2.6. Указать фиктивные переменные функций, заданных своими таблицами. Произвести операцию исключения фиктивной переменной.

1) $f(x_1, x_2, x_3) = (11110000)$;

2) $f(x_1, x_2, x_3) = (00110011)$;

3) $f(x_1, x_2, x_3) = (00111100)$.

2.7. Построить таблицу функции $f(x_1, x_2, x_3)$, у которой:

1) Все переменные существенные;

2) Переменная x_2 фиктивная, а остальные существенные.

2.8. Указать существенные переменные у функций, заданных формулами:

1) $(x \to (x \vee y)) \to z$; 2) $(x \vee y) \to y$.

2.2. Эквивалентность формул

2.9. Доказать основные эквивалентности формул:

1) $x + x = 0$;
2) $x \sim x = 1$;
3) $x = \overline{\overline{x}}$;
4) $\overline{x} = x + 1$;
5) $x \wedge \overline{x} = 0$;
6) $x \vee \overline{x} = 1$;
7) $x \wedge 1 = x$;
8) $x \vee 0 = x$;
9) $x \sim y = \overline{x + y}$;
10) $x|y = \overline{x \wedge y}$;
11) $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$;
12) $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$;
13) $x \to y = \overline{x} \vee y$;
14) $x \sim y = (\overline{x} \wedge \overline{y}) \vee (x \wedge y)$;
15) $x \sim y = (x \vee \overline{y}) \wedge (\overline{x} \vee y)$;
16) $x \sim y = (x \to y) \wedge (y \to x)$.

2.10. Найти все функции двух переменных, обладающих свойством

1) коммутативности; 2) ассоциативности.

2.11. Проверить справедливость следующих соотношений:

1) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;
2) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$;
3) $x \vee (y \sim z) = (x \vee y) \sim (x \vee z)$;
4) $x \wedge (y \sim z) = (x \wedge y) \sim (x \wedge z)$;
5) $x \to (y \sim z) = (x \to y) \sim (x \to z)$;
6) $x \to (y \vee z) = (x \to y) \vee (x \to z)$;
7) $x \to (y \wedge z) = (x \to y) \wedge (x \to z)$;
8) $x + (y \to z) = (x + y) \to (x + z)$;
9) $x|(y|z) = (x|y)|z$.

2.12. С помощью преобразований доказать эквивалентность следующих формул:

1) $(x + y) \to (x \vee y)$ и 1;
2) $(\overline{x} \to y) \to (x + y)$ и $x|y$;
3) $x \to ((x \wedge y) \to (((x \to y) \to y) \wedge z))$ и $y \to (x \to z)$.

2.3. СКНФ, СДНФ и полином Жегалкина

2.13. Построить СДНФ и СКНФ для следующих функций, используя их таблицы:

1) $(x + y) \to (y \wedge z)$; 2) (01101100); 3) (10001110).

2.14. Построить СДНФ и СКНФ для следующих функций, используя эквивалентные преобразования формул

1) $x \vee (y \wedge z)$;
2) $(x \to \overline{y}) \wedge (y \to \overline{z})$;
3) $((x + z) \sim (x \vee y)) \wedge y$;
4) $(((x \vee y) \to y) \vee (\overline{y} \to \overline{x})) \wedge (y \vee \overline{z})$;

5) $(((x \to (y \wedge z)) \wedge ((y \wedge t) + z) \to (x \wedge \overline{t}))) \vee \overline{x}$.

2.15. Методом неопределённых коэффициентов найти полином Жегалкина для следующих функций
1) $x \sim y$; 2) (01101000); 3) (11111000); 4) $(x + y) \wedge (x|y)$.

2.16. С помощью эквивалентных преобразований построить полином Жегалкина для следующих функций
1) $x \to y$; 3) $((x \to y) \vee \overline{z}) \sim x$;
2) $(x|y)|z$; 4) $(x \to y) \wedge (x|y)$.

2.4. Критерий полноты

2.17. Какие из перечисленных функций являются самодвойственными:
1) (0001001001100111); 2) $f(x, y, z) = (x \vee y \vee \overline{z}) \wedge (\overline{x} \vee y\overline{z})$;
3) $f(x_1, \ldots, x_{2m+1}) = x_1 + x_2 + \ldots + x_{2m+1} + \sigma$, где $\sigma \in \{0, 1\}$.

2.18. Какие из перечисленных функций являются монотонными:
1) $x \to (x \to y)$; 3) $y \vee (x \wedge z)$; 5) (01100111);
2) $x \to (y \to z)$; 4) $x \wedge y + x \wedge z + z \wedge y + z$; 6) (0001010101010111).

2.19. Какие из перечисленных функций являются линейными:
1) $((x_1 \wedge x_2) \vee \overline{x_1 \wedge x_2}) + x_3$; 3) $((x_1 \to x_2) \wedge (x_2 \to x_1)) \sim x_3$.
2) $x_1 \wedge x_2 \wedge (x_1 + x_2)$;

2.20. По критерию полноты проверить полноту следующих систем функций:
1) $\{x \to y, x \to (\overline{y} \wedge z)\}$; 3) $\{(01101001), (10001101), (00011100)\}$;
2) $\{x \wedge \overline{y}, \overline{x} \sim (y \wedge z)\}$; 4) $(S \setminus M) \cup ((L \setminus T_0) \cup T_1)$.

2.5. Замкнутые и полные классы

2.21. Проверить, являются ли данные классы функций замкнутыми:
1) $\{0\}$; 2) $\{\overline{x}\}$; 3) $\{x_1, x_1x_2, x_1x_2x_3, \ldots\}$;
4) Все функции пункта 3 и все функции, получающиеся из них заменой переменных.

2.22. Проверить справедливость в P_2 следующих утверждений:
1) Пересечение замкнутых классов является замкнутым классом;
2) Разность замкнутых классов есть замкнутый класс;
3) Дополнение замкнутого класса не является замкнутым классом.

2.23. Проверить справедливость равенства двух множеств функций из P_2

1) $[F_1 \cap F_2] = [F_1] \cap [F_2]$; 2) $[F_1 \cup F_2] = [F_1] \cup [F_2]$.

2.24. Сведением к заведомо полным системам в P_2 доказать полноту следующих систем

1) $\{\overline{x \vee y}\}$; 3) $\{x \to y, \overline{x + y + z}\}$;

2) $\{(x \wedge y) + z, (x \sim y) + z\}$; 4) $\{x \to y, (1100001100111100)\}$;

5) $\{0, (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z), (x \sim y) + z\}$.

2.25. Доказать, что классы T_0, T_1, M, S, L являются предполными.

2.26. Перечислить все монотонные функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4) \in M$, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $f(1,0,0,0) = 1$, $f(0,1,1,1) = 0$; 3) $f(1,0,0,1) = 0$, $f \in S$.

2) $f(1,0,0,0) = 1$, $f \in L$;

2.27. Перечислить все функции Шеффера от двух переменных в P_2;

2.28. Найти число функций Шеффера от трёх переменных в P_2.

2.29. Найти число линейных функций от n переменных в P_2.

2.30. Найти число функций от n переменных в каждом из следующих множеств:

1) $T_0 \cap T_1$; 4) $L \setminus (T_0 \cup T_1)$; 7) $(L \cup S) \setminus (T_0 \cup T_1)$;

2) $T_0 \cup T_1$; 5) $T_1 \cap S$; 8) $(S \setminus T_0) \cap T_1$.

3) $T_0 \cap L$; 6) $L \cup S \cup T_1$;

2.31. Выяснить, принадлежит ли функция $f(x, y)$ замыканию множества F, если

1) $f = x + y$, $F = \{x \to y\}$; 3) $f = \overline{x} \vee \overline{y}$, $F = T_0 \cup (S \setminus (L \cup T_1))$;

2) $f = x \to y$, $F = \{x \wedge y, x \vee y\}$; 4) $f = x \wedge \overline{y}$, $F = (T_1 \setminus L) \cup \{x + y\}$.

2.6. Функции k-значной логики

2.32. Доказать следующие соотношения в P_k:

1) $-(\overline{x}) = \sim x$; 5) $(\sim x) \dot{-} (y \dot{-} x) = \sim (x \vee y)$;

2) $x \dot{-} (x \dot{-} y) = x \wedge y$; 6) $\sim (\overline{x} + y) = (\sim x) + (\sim y)$;

3) $x \dot{-} y = x - x \wedge y$; 7) $x \dot{-} y = x \vee y - y$;

4) $(\sim x) \dot{-} (\sim y) = y \dot{-} x$; 8) $\overline{x} = ((x + 2) \dot{-} 1) \vee J_{k-2}(x)$.

2.33. Доказать аналог правил де Моргана в P_k:

1) $(\sim x) \wedge (\sim y) = \sim (x \vee y)$;

2) $(\sim x) \vee (\sim y) = \sim (x \wedge y)$.

2.7. Нормальные формы в P_k

2.34. Записать следующие функции k-значной логики в первой и во второй нормальных формах для данного k

1) $f(x) = \sim x$, $k = 5$;

2) $f(x, y) = x \dot{-} y$, $k = 3$;

3) $f(x, y) = x \cdot y$, $k = 3$;

4) $f(x, y) = x \wedge y$, $k = 3$;

5) $f(x) = j_1(x)$, $k = 3, 4$;

6) $f(x) = J_0(x^2 \dot{-} x)$, $k = 6$;

7) $f(x, y) = x^2 \dot{-} y$, $k = 4$;

8) $f(x, y) = x^2 \cdot y^2$, $k = 4$.

2.35. Построить полином, задающий данную функцию в P_k при указанном k

1) $f(x) = 4J_2(x) + 3J_3(x)$, $k = 5$;

2) $f(x) = J_0(x) + J_2(x) + J_4(x)$, $k = 5$;

3) $f(x) = j_1(x) + j_2(x) + j_3(x)$, $k = 5$;

4) $f(x, y) = (x \wedge y) + (x \vee y)$, $k = 3$;

5) $f(x) = 2j_0(x) + J_1(x) + j_2(x) \cdot J_2(x)$, $k = 3$;

6) $f(x, y) = ((x \dot{-} y) + x) \wedge (\sim y)$, $k = 3$.

2.36. Определить, можно ли представить в виде полинома функцию из P_k при данном k

1) $f(x) = j_1(x) + j_2(x)$, $k = 4$;

2) $f(x) = 2j_0(x)$, $k = 4$;

3) $f(x) = j_0(x) + J_5(x)$, $k = 6$;

4) $f(x) = x \dot{-} (\sim x)$, $k = 6$.

2.8. Замкнутость и полнота в P_k

2.37. Доказать, что функция f принадлежит замыканию системы F:

1) $f(x) = j_0(x)$, $F = \{1, x \dot{-} y\}$;

2) $f(x) = J_{k-2}(x)$, $F = \{k - 1, x + 2, x \dot{-} y\}$;

3) $f(x) = \overline{x}$, $F = \{k - 1, x + y\}$;

4) $f(x) = j_i(x)$, $F = \{0, 1, \ldots, k - 1, x \dot{-} 2y\}$.

2.38. Доказать полноту следующих систем функций в P_k сведением к заведомо полной системе

1) $\{k - 1, x \dot{-} y, x + y\}$;

2) $\{\sim x, x + 2, x \dot{-} y\}$;

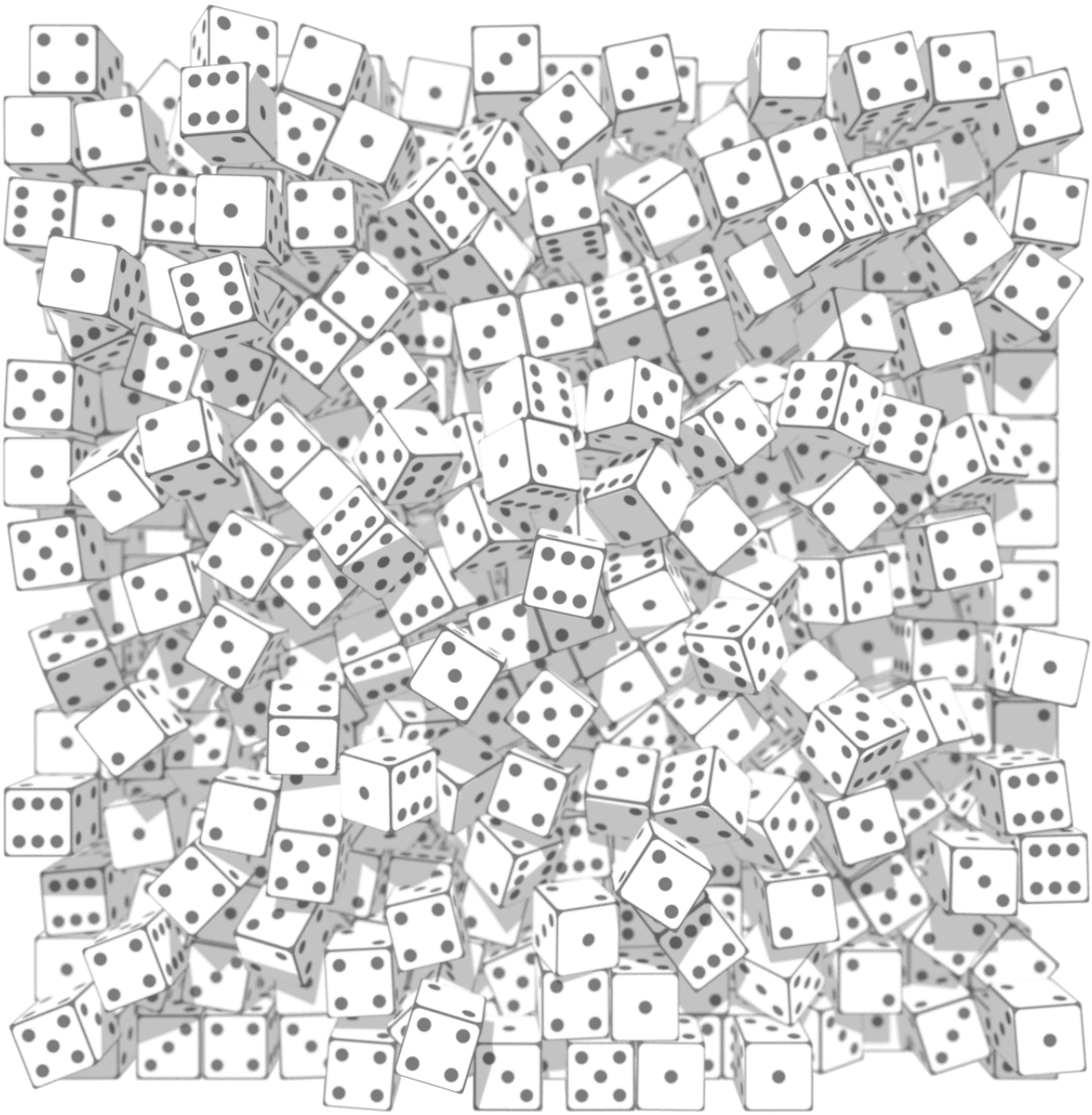
3) $\{k - 2, x + y, (\sim x) \dot{-} 2y\}$;

4) $\{1, 2x + y, x^2 \dot{-} y\}$;

5) $\{1, x^2 - y, x \wedge y\}$;

6) $\{-x, 1 - x^2, x \dot{-} y\}$;

7) $\{\overline{x}, j_0(y), \min(x, y)\}$.

2.39. Доказать, что система функций $\{0, 1, \ldots, k-1, x \cdot y\}$ не полна в P_k при всех $k \geqslant 2$.

2.40. Используя критерий Слупецкого доказать, что система $\{j_0(x), x + y\}$ полна в P_k при $k \geqslant 3$.