Уравнения математической физики

1. Привести к каноническому виду уравнение

$$4y^2u_{xx} - e^{2x}u_{yy} + 5u_x = 0.$$

2. Привести к каноническому виду уравнение

$$u_{xx} + yu_{yy} + \frac{u_x - u_y}{2} = 0, \quad (y > 0).$$

3. Привести к каноническому виду уравнение

$$tg^2(x)u_{xx} - 2ytg(x)u_{xy} + y^2u_{yy} + u_y = 0, \quad \big(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\big).$$

4. Привести к каноническому виду уравнение

$$y^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + 2x^2u_{yy} + 3u_x = 0.$$

5. Привести к каноническому виду уравнение

$$y^2u_{xx} + x^2u_{yy} = 0.$$

6. Привести к каноническому виду уравнение с тремя независимыми переменными

$$u_{xx} + 6u_{xy} + u_{yy} - 2u_{yz} + u_{zz} + u_x - 4u_y = 0.$$

7. Привести к каноническому виду уравнение с тремя независимыми переменными

$$u_{xz} - 4u_{xy} + 6u_x = 0.$$

8. Привести к каноническому виду уравнение с тремя независимыми переменными

$$2u_{xy} + u_{yy} + 4u_{yz} + u_{zz} - 5u_z = 0.$$

9. Привести к каноническому виду уравнение с тремя независимыми переменными

$$u_{xy} + 8u_{yz} + 2u_x + 3u_y = 0.$$

10. Найти общее решение уравнения

$$u_{xx} - 4\cos(x)u_{xy} - 4\sin^2(x)u_{yy} + 2\sin(x)u_y = 0.$$

11. Найти общее решение уравнения

$$u_{xx} - 6\sin(x)u_{xy} - 9\cos^2(x)u_{yy} - 3\cos(x)u_y = 0.$$

12. Найти общее решение уравнения

$$u_{xx} + 18u_{xy} + 81u_{yy} + 5u_x + 45u_y = 0.$$

13. Найти общее решение уравнения

$$u_{xx} + 10u_{xy} + 9u_{yy} + 2(u_x + u_y) = 0.$$

14. Найти решение уравнения

$$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0,$$

удовлетворяющее условиям $u(x,0) = 0$, $u_y(x,0) = 3x$.

15. Найти решение уравнения

$$u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0,$$

удовлетворяющее условиям $u(x,0) = 12x^2$, $u_y(x,0) = 0$.

16. Неограниченная струна выведена из состояния покоя локальным начальным отклонением, имеющим вид:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [2l, 4l], \\ 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{l} - 1\right)\right), & x \in [2l, 4l] \end{cases}$$

Начальная скорость отсутствует.
a) Построить профиль струны в моменты времени $t_k = \frac{kl}{4a}$, $k = 0, 1, 3, 4, 6$.
b) Написать аналитическую формулу $u(x,t)$, представляющую профиль струны при $0 < t < \frac{l}{a}$.

17. Неограниченная струна выведена из состояния покоя локальным начальным отклонением, имеющим вид:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0, 2h], \\ -x^2 + 2hx, & x \in [0, 2h] \end{cases}$$

Начальная скорость отсутствует.
a) Построить профиль струны в моменты времени $t_k = \frac{hk}{4a}$, $k = 0, 1, 2, 4, 5$.
b) Написать аналитическую формулу $u(x,t)$, представляющую профиль струны при $t > \frac{h}{a}$.

18. Неограниченной струне сообщена на отрезке $[c, 2c]$ поперечная начальная скорость $v_0 = const$, вне этого отрезка начальная скорость равна нулю. Начальное отклонение отсутствует.
a) Нарисовать профиль струны в моменты времени $t_k = \frac{kc}{4a}$, $k = 0, 1, 2, 4, 6$.
b) Написать аналитическую формулу $u(x_0, t)$, представляющую закон движения точки струны с абсциссой $x_0 > 2c$.

19. Неограниченной струне сообщена на отрезке $[-h, h]$ поперечная начальная скорость $\psi(x) = x + h$, вне этого отрезка начальная скорость равна нулю. Начальное отклонение отсутствует.
a) Нарисовать профиль струны в моменты времени $t_k = \frac{hk}{4a}$, $k = 0, 1, 3, 5$.
b) Написать аналитическую формулу $u(x_0, t)$, представляющую закон движения точки струны с абсциссой $x_0 < -h$.

20. Неограниченной струне сообщена поперечная начальная скорость

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0, 2l], \\ 2l - x, & x \in [0, 2l]. \end{cases}$$

Начальное отклонение отсутствует.
a) Построить профиль струны в моменты времени $t_k = \frac{kl}{4a}$, $k = 0, 1, 3, 5, 7$.
b) Написать аналитическую формулу $u(x_0, t)$, представляющую закон движения точки струны с абсциссой $0 < x_0 < l$.

21. Полуограниченная струна $(0 < x < +\infty)$ закреплена в точке $x = 0$. В начальный момент времени профиль струны описывается функцией

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [l, 3l], \\ x - l, & x \in [l, 2l], \\ 3l - x, & x \in [2l, 3l]. \end{cases}$$

Начальная скорость отсутствует. Нарисовать профиль струны в моменты времени $t_k = \frac{kl}{4a}$, $k = 0, 2, 4, 6, 8$.

22. Полуограниченная струна $(-\infty < x < 0)$ закреплена в точке $x = 0$. В начальный момент времени профиль струны описывается функцией

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [-2h, -h], \\ 4(x + 2h)(x + h), & x \in [-2h, -h]. \end{cases}$$

Начальная скорость отсутствует. Нарисовать профиль струны в моменты времени $t_k = \frac{hk}{4a}$, $k = 0, 2, 4, 6, 8$.

23. Полуограниченная струна $(0 < x < +\infty)$ со свободным левым концом выведена из состояния покоя локальным начальным отклонением

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [l, 2l], \\ -4\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right), & x \in [l, 2l] \end{cases}$$

Начальная скорость отсутствует. Нарисовать профиль струны в моменты времени $t_k = \frac{kl}{4a}$, $k = 0, 1, 4, 6, 8$.

24. Полуограниченная струна $(0 < x < +\infty)$ со свободным левым концом выведена из состояния покоя локальным начальным отклонением
$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [l, 3l], \\ (l - x)(x - 3l), & x \in [l, 3l] \end{cases}$$
Начальная скорость отсутствует. Нарисовать профиль струны в моменты времени $t_k = \frac{kl}{4a}$, $k = 0, 2, 4, 6, 8$.

25. Решить задачу Коши
$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} + 10t, \\ u|_{t=0} &= \sin(x), \\ u_t|_{t=0} &= 4x. \end{aligned}$$

26. Решить задачу Коши
$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx} + \cos(x), \\ u|_{t=0} &= 2x^2, \\ u_t|_{t=0} &= e^x. \end{aligned}$$

27. Решить задачу Коши
$$\begin{aligned} u_{tt} &= 4u_{xx} + xt, \\ u|_{t=0} &= e^{2x}, \\ u_t|_{t=0} &= 4x^3. \end{aligned}$$

28. Решить задачу Коши $(n = 2)$
$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 \Delta u, \\ u|_{t=0} &= (x + y)^2, \\ u_t|_{t=0} &= (x + y)^2. \end{aligned}$$

29. Решить задачу Коши $(n = 2)$
$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 \Delta u + x^2 + 2ty, \\ u|_{t=0} &= x + \sin(y), \\ u_t|_{t=0} &= 0. \end{aligned}$$

30. Решить задачу Коши $(n = 2)$
$$\begin{aligned} u_{tt} &= 4\Delta u + x^3 - 3xy^2, \\ u|_{t=0} &= e^x \cos(y), \\ u_t|_{t=0} &= e^y \sin(x). \end{aligned}$$

31. Решить задачу Коши ($n = 2$)

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 \Delta u, \\ u|_{t=0} &= 2x^2 - 3y^2, \\ u_t|_{t=0} &= 2x^2 + 3y^2. \end{aligned}$$

32. Решить задачу Коши ($n = 2$)

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 9\Delta u + xyt, \\ u|_{t=0} &= x, \\ u_t|_{t=0} &= x^2 - y^2. \end{aligned}$$

33. Решить задачу Коши ($n = 2$)

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \Delta u + xye^t, \\ u|_{t=0} &= 3x^2y - y^3, \\ u_t|_{t=0} &= 2. \end{aligned}$$

34. Решить задачу Коши ($n = 2$)

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \Delta u + \sin(t), \\ u|_{t=0} &= 3x + 4y, \\ u_t|_{t=0} &= 6xy. \end{aligned}$$

35. Решить задачу Коши ($n = 3$)

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 \Delta u, \\ u|_{t=0} &= (x + z)^2, \\ u_t|_{t=0} &= y. \end{aligned}$$

36. Решить задачу Коши ($n = 3$)

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \Delta u + 2xyzt, \\ u|_{t=0} &= x^2 + y^2 - 2z^2, \\ u_t|_{t=0} &= 5z. \end{aligned}$$

37. Решить задачу Коши ($n = 3$)

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \Delta u + 2\cos(t), \\ u|_{t=0} &= x^2 - z^2, \\ u_t|_{t=0} &= y. \end{aligned}$$

38. Решить задачу Коши ($n = 3$)

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 4\Delta u + xt, \\ u|_{t=0} &= x^2 + y^2 + z^2, \\ u_t|_{t=0} &= \sin(y). \end{aligned}$$

39. Решить задачу Коши ($n = 3$)

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 16\Delta u + t^2(x+z), \\ u|_{t=0} &= \mathrm{sh}(y), \\ u_t|_{t=0} &= \cos(z). \end{aligned}$$

40. Решить задачу Коши ($n = 3$)

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \Delta u + e^{4t}, \\ u|_{t=0} &= arctg(2x), \\ u_t|_{t=0} &= y^2 + z. \end{aligned}$$

41. Решить задачу Коши ($n = 3$)

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \Delta u, \\ u|_{t=0} &= x^3 + z^3, \\ u_t|_{t=0} &= 4e^y. \end{aligned}$$

42. Решить задачу Коши ($n = 1$)

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx} + \sin(t), \\ u|_{t=0} &= e^{-x^2}. \end{aligned}$$

43. Решить задачу Коши ($n = 1$)

$$\begin{aligned} u_t &= 4u_{xx} + t + e^t, \\ u|_{t=0} &= 2. \end{aligned}$$

44. Решить задачу Коши ($n = 2$)

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u + \sin(t), \\ u|_{t=0} &= xye^{-x^2}. \end{aligned}$$

45. Отклонение от положения равновесия однородной струны, закрепленной на концах $x = 0$ и $x = \pi$, в начальный момент времени задается функцией $\varphi(x) = \sin(7x)$. Определить отклонение $u(x,t)$ струны для любого момента времени, если начальная скорость отсутствует.

46. Найти продольные колебания стержня, у которого оба конца $x = 0$ и $x = \pi$ свободны, если

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= \cos(2x); \\ u_t|_{t=0} &= 3\cos(5x). \end{aligned}$$

47. Решить методом Фурье

$$u_{tt} = 4u_{xx} + 3t\sin\Big(\frac{7\pi x}{2l}\Big), \quad (0 < x < l)$$
$$u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=l} = 0,$$
$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 2\sin\Big(\frac{\pi x}{2l}\Big) + 7\sin\Big(\frac{5\pi x}{2l}\Big).$$

48. Решить методом Фурье

$$u_{tt} = 16u_{xx} + xt, \quad (0 < x < 2)$$
$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=2} = 0,$$
$$u|_{t=0} = \sin(\pi x) + 2\sin\Big(\frac{5\pi x}{2}\Big), \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

49. Решить методом Фурье

$$u_{tt} = 25u_{xx} + \cos(17x)\,\mathrm{ch}(3t), \quad \Big(0 < x < \frac{\pi}{2}\Big)$$
$$u_x|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi/2} = 0,$$
$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \cos(x) + 4\cos(9x).$$

50. Решить методом Фурье

$$u_{tt} = a^2u_{xx} + 2e^{3t}\sin\Big(\frac{5\pi x}{4}\Big), \quad (0 < x < 2)$$
$$u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=2} = 0,$$
$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = v_0, \ (v_0 = const).$$

51. Решить методом Фурье

$$u_{tt} = 9u_{xx} + A\cos\Big(\frac{5\pi x}{2l}\Big)\sin(2t), \quad (0 < x < l\ , A = const)$$
$$u_x|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0,$$
$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 3\cos\Big(\frac{\pi x}{2l}\Big).$$

52. Решить методом Фурье

$$u_{tt} = 49u_{xx} + B, \quad (0 < x < \pi\ , B = const)$$
$$u_x|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=\pi} = 0,$$
$$u|_{t=0} = 2\cos(40x), \quad u_t|_{t=0} = \cos(40x) + 6\cos(50x).$$

53. Решить методом Фурье

$$u_{tt} = 4u_{xx} + t\sin(3x), \quad (0 < x < \pi)$$
$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = 0,$$
$$u|_{t=0} = \begin{cases} \frac{hx}{c}, & x \in [0, c] \\ \frac{h(\pi - x)}{\pi - c}, & x \in [c, \pi] \end{cases}, \quad u_t|_{t=0} = 0.$$
$$(h = const, c = const, 0 < c < \pi)$$

54. Решить методом Фурье

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} + 5\cos(4x)e^{4t}, \quad (0 < x < \pi) \\ u_x|_{x=0} &= 0, \quad u_x|_{x=\pi} = 0, \\ u|_{t=0} &= 0, \quad u_t|_{t=0} = 2\cos(3x) + 4\cos(10x). \end{aligned}$$

55. Решить методом Фурье

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} + u, \quad (0 < x < 2) \\ u|_{x=0} &= 2t, \quad u|_{x=2} = 0, \\ u|_{t=0} &= 0, \quad u_t|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

56. Решить методом Фурье

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}, \quad (0 < x < 1) \\ u|_{x=0} &= t + 1, \quad u|_{x=1} = t^3 + 2, \\ u|_{t=0} &= x + 1, \quad u_t|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

57. Решить методом Фурье

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} + 4u + 2\sin^2(x), \quad (0 < x < \pi) \\ u_x|_{x=0} &= 0, \quad u_x|_{x=\pi} = 0, \\ u|_{t=0} &= 0, \quad u_t|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

58. Решить методом Фурье

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} + Ae^{-t}\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right), \quad (0 < x < l) \\ u|_{x=0} &= 0, \quad u|_{x=l} = 0, \\ u|_{t=0} &= 0, \quad u_t|_{t=0} = \sin\left(\frac{3\pi x}{l}\right). \end{aligned}$$

59. Решить методом Фурье

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}, \quad (0 < x < \pi) \\ u|_{x=0} &= t, \quad u|_{x=\pi} = 0, \\ u|_{t=0} &= \sin(x)\cos(x), \quad u_t|_{t=0} = 1. \end{aligned}$$

60. Решить методом Фурье

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}, \quad (0 < x < l) \\ u_x|_{x=0} &= 0, \quad u_x|_{x=l} = e^{-t}, \\ u|_{t=0} &= 0, \quad u_t|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

61. Решить методом Фурье

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} - 2u_t &= 4t(\sin(x) - x), \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right) \\ u|_{x=0} &= 3, \quad u_x|_{x=\pi/2} = t^2 + t, \\ u|_{t=0} &= 3, \quad u_t|_{t=0} = x + \sin(x). \end{aligned}$$

62. Решить методом Фурье

$$u_{tt} - u_{xx} + 2u_t = 4x + e^t \cos(3x), \quad \big(0 < x < \frac{\pi}{2}\big)$$
$$u_x|_{x=0} = 2t, \quad u|_{x=\pi/2} = \pi t,$$
$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 5\cos(x).$$

63. Решить задачу о свободных колебаниях прямоугольной мембраны $(0 < x < s), (0 < y < p)$

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}),$$
$$u|_{x=0} = u|_{x=s} = 0,$$
$$u|_{y=0} = u|_{y=p} = 0,$$
$$u|_{t=0} = 0, u_t|_{t=0} = 5\sin\big(\frac{3\pi x}{s}\big)\sin\big(\frac{4\pi y}{p}\big).$$

64. Решить задачу о свободных колебаниях прямоугольной мембраны $(0 < x < s), (0 < y < p)$

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy},$$
$$u|_{x=0} = u_x|_{x=s} = 0,$$
$$u|_{y=0} = u_y|_{y=p} = 0,$$
$$u|_{t=0} = Axy, \ u_t|_{t=0} = 0.$$

65. Решить задачу о свободных колебаниях прямоугольной мембраны $(0 < x < s), (0 < y < p)$

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy},$$
$$u_x|_{x=0} = u|_{x=s} = 0,$$
$$u|_{y=0} = u|_{y=p} = 0,$$
$$u|_{t=0} = \cos\big(\frac{\pi x}{2s}\big)\sin\big(\frac{\pi y}{p}\big), \ u_t|_{t=0} = 0.$$

66. Дан тонкий однородный стержень $(0 < x < 2l)$, боковая поверхность которого теплоизолирована. Найти распределение температуры $u(x,t)$ в стержне, если концы стержня теплоизолированы, а начальное распределение температуры задается формулой

$$u|_{t=0} = \begin{cases} u_0 = const, & x \in [0,l] \\ 0, & x \in [l, 2l]. \end{cases}$$

67. Решить методом Фурье

$$u_t = a^2 u_{xx}, \ (0 < x < l)$$
$$u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0,$$
$$u|_{t=0} = x(l-x).$$

68. Решить методом Фурье

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + 3\sin(2x),\ (0 < x < \pi) \\ u|_{x=0} &= u|_{x=\pi} = 0, \\ u|_{t=0} &= 10\sin(x) + \sin(7x). \end{aligned}$$

69. Решить методом Фурье

$$\begin{aligned} u_t &= 4u_{xx} + xt,\ (0 < x < 2) \\ u_x|_{x=0} &= u|_{x=2} = 0, \\ u|_{t=0} &= \cos\Big(\frac{\pi x}{4}\Big). \end{aligned}$$

70. Решить методом Фурье

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + \sin(4x)\sin(x),\ (0 < x < \pi) \\ u_x|_{x=0} &= u_x|_{x=\pi} = 0, \\ u|_{t=0} &= \cos(3x). \end{aligned}$$

71. Дан тонкий однородный стержень $(0 < x < l)$, боковая поверхность которого теплоизолирована. Найти распределение температуры $u(x,t)$ в стержне, если концы стержня поддерживаются при постоянных температурах $u|_{x=0} = u_1$, $u|_{x=l} = u_2$, а начальное распределение температуры задается формулой

$$u|_{t=0} = \frac{x^2 u_2}{l^2} + \frac{(l-x)u_1}{l}.$$

72. Решить методом Фурье

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx},\ (0 < x < l) \\ u_x|_{x=0} &= 1,\ \ u|_{x=l} = 0, \\ u|_{t=0} &= 0. \end{aligned}$$

73. Решить методом Фурье

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + u + 2\sin(2x)\sin(x),\ \Big(0 < x < \frac{\pi}{2}\Big) \\ u_x|_{x=0} &= u|_{x=\pi/2} = 0, \\ u|_{t=0} &= 0. \end{aligned}$$

74. Решить методом Фурье

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + 4u + x^2 - 2t - 4x^2 t + 2\cos^2(x),\ (0 < x < \pi) \\ u_x|_{x=0} &= 0,\ \ u_x|_{x=\pi} = 2\pi t, \\ u|_{t=0} &= 0. \end{aligned}$$

75. Решить методом Фурье

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} - u &= xt(2-t) + 2\cos(t),\ (0 < x < \pi) \\ u_x|_{x=0} &= u_x|_{x=\pi} = t^2, \\ u|_{t=0} &= \cos(2x). \end{aligned}$$

76. Решить методом Фурье

$$u_t - u_{xx} - 9u = 4\sin^2(t)\cos(3x) - 9x^2 - 2,\ (0 < x < \pi)$$
$$u_x|_{x=0} = 0,\ \ u_x|_{x=\pi} = 2\pi,$$
$$u|_{t=0} = x^2 + 2.$$

77. Решить методом Фурье

$$u_t = u_{xx} + 6u + 2t(1-3t) - 6x + 2\cos(x)\cos(2x),\ \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$$
$$u_x|_{x=0} = 1,\ u|_{x=\frac{\pi}{2}} = t^2 + \frac{\pi}{2},$$
$$u|_{t=0} = x.$$

78. Решить методом Фурье

$$u_t = u_{xx} + u - x + 2\sin(2x)\cos(x),\ \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$$
$$u|_{x=0} = 0,\ u_x|_{x=\frac{\pi}{2}} = 1,$$
$$u|_{t=0} = x.$$

79. Решить методом Фурье

$$u_t = u_{xx} + 6u + x^2(1-6t) - 2(t+3x) + \cos(2x),\ (0 < x < \pi)$$
$$u_x|_{x=0} = 1,$$
$$u_x|_{x=\pi} = 2\pi t + 1,$$
$$u|_{t=0} = x.$$

80. Дан тонкий однородный стержень $(0 < x < \pi)$, боковая поверхность которого теплоизолирована. Найти распределение температуры $u(x,t)$ в стержне, если концы стержня поддерживаются при постоянной температуре $u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = u_1$, начальная температура $u|_{t=0} = u_1 + 4x(\pi - x)$.

81. Найти функцию гармоническую внутри единичного круга с центром в начале координат и такую, что

$$u|_{r=1} = \cos^2(\varphi).$$

82. Найти функцию гармоническую внутри круга радиуса R с центром в начале координат, если

$$u|_{r=R} = 2\cos(2\varphi)\cos(3\varphi).$$

83. Найти функцию гармоническую внутри единичного круга с центром в начале координат и такую, что

$$u|_{r=1} = \cos^4(\varphi).$$

84. Найти функцию гармоническую внутри единичного круга с центром в начале координат и такую, что

$$u|_{r=1} = \sin^3(\varphi).$$

85. Найти функцию гармоническую внутри круга радиуса R с центром в начале координат и такую, что

$$u|_{r=R} = \sin^2(\varphi).$$

86. Найти функцию гармоническую внутри круга радиуса $r = 2$ с центром в начале координат и такую, что

$$u|_{r=2} = \sin(3\varphi)\cos^2(\varphi).$$

87. Найти функцию гармоническую внутри круга радиуса $r = 2$ с центром в начале координат и такую, что

$$u|_{r=2} = \sin(4\varphi)\sin(8\varphi).$$

88. Найти функцию гармоническую внутри круга радиуса $r = 2$ с центром в начале координат и такую, что

$$u|_{r=2} = 10\cos(10\varphi)\cos(20\varphi).$$

89. Найти функцию гармоническую в кольце $1 < r < 2$ с центром в начале координат, если

$$u|_{r=1} = 3 + 2\sin(3\varphi),$$

$$u|_{r=2} = \sin(\varphi).$$

90. Найти функцию гармоническую в кольце $1 < r < 2$ с центром в начале координат, если

$$u|_{r=1} = 3\cos(5\varphi),$$

$$u|_{r=2} = \cos^2(\varphi).$$

91. Найти функцию гармоническую в кольце $1 < r < 2$ с центром в начале координат, если

$$u|_{r=1} = 4\cos(\varphi)\sin(5\varphi),$$

$$u|_{r=2} = 0.$$

92. Найти функцию гармоническую в кольце $1 < r < 3$ с центром в начале координат и такую, что

$$u|_{r=1} = 1 + \sin(\varphi)\cos(\varphi),$$

$$u|_{r=3} = \sin^2(\varphi) + 6\sin(\varphi).$$

93. Решить уравнение Пуассона $\Delta u = 12(x^2 - y^2)$ в кольце $1 < r < 2$, если
$$u|_{r=1} = 0, \quad u|_{r=2} = 0.$$

94. Решить уравнение Пуассона $\Delta u = -4xy$ в круге радиуса $r = 1$ с центром в начале координат, если
$$u|_{r=1} = 0.$$

95. Решить уравнение Пуассона $\Delta u = -x^2$ в круге радиуса $r = 2$, если
$$u|_{r=2} = 0.$$

96. Найти решение уравнения Пуассона $\Delta u = -2$ в прямоугольнике $(0 < x < 2)$, $(0 < y < 1)$, если оно на границе этой области обращается в нуль.

97. Найти функцию Грина задачи Дирихле для полупространства $(z > 0)$ в $\mathbf{R}^3$.

98. Найти функцию Грина задачи Дирихле для шара радиуса R в $\mathbf{R}^3$.

99. Найти функцию Грина задачи Дирихле для полушара $(z > 0,\ |z| < R)$ в $\mathbf{R}^3$.

100. Найти функцию Грина задачи Дирихле для двугранного угла $(y > 0, z > 0)$ в $\mathbf{R}^3$.